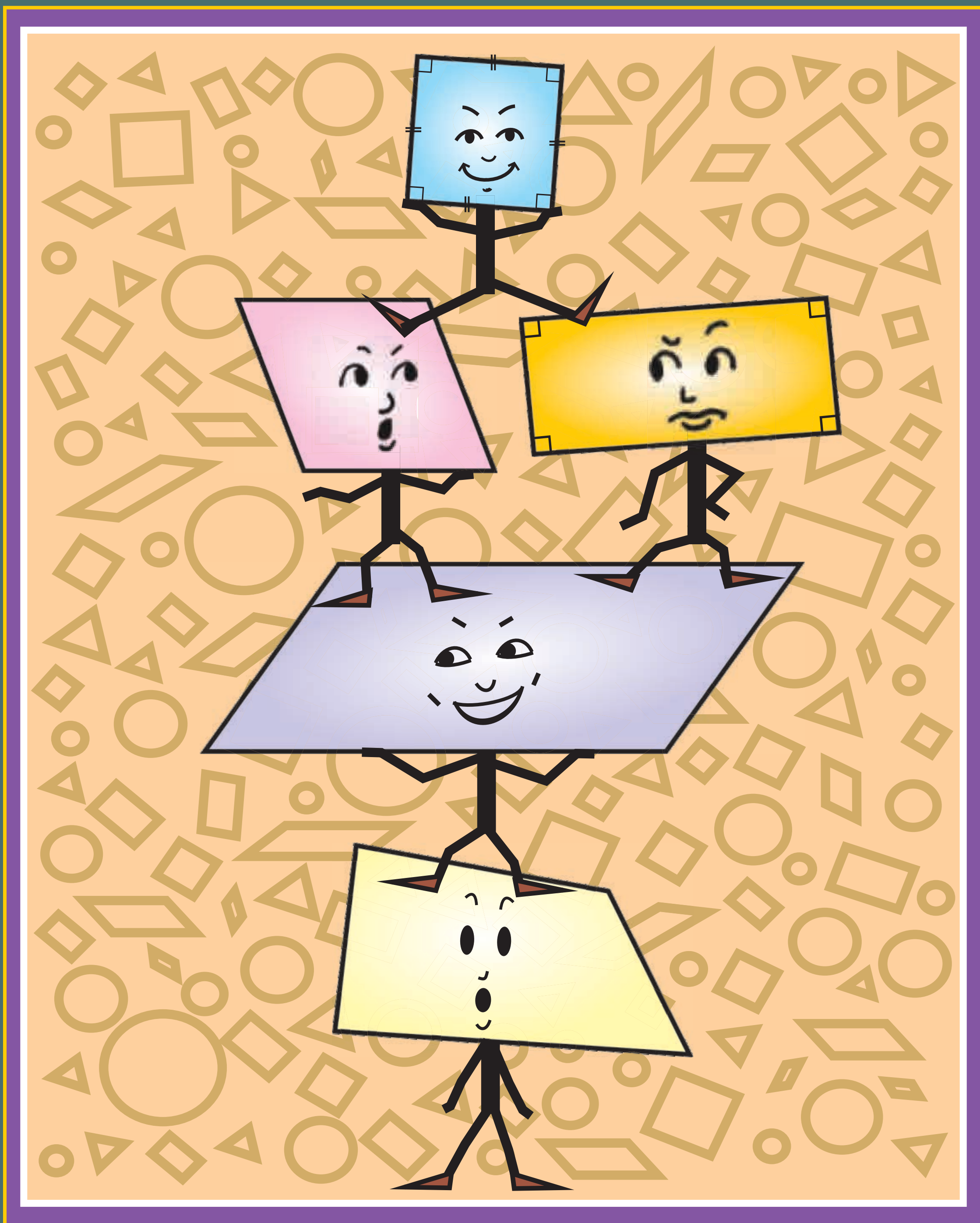


# गणित

## आठवीं कक्षा



शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ के अनुसार समन्वय समिति का गठन किया गया। दि. ३.३.२०१७ को हुई इस समिति की बैठक में यह पाठ्यपुस्तक निर्धारित करने हेतु मान्यता प्रदान की गई।

# गणित

## आठवीं कक्षा

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिति व अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे - ४११ ००४.

CHFQKP

आपके स्मार्टफोन में 'DIKSHA App' द्वारा, पुस्तक के प्रथम पृष्ठ पर Q.R.Code के माध्यम से डिजिटल पाठ्यपुस्तक एवं प्रत्येक पाठ में अंतर्निहित Q.R.Code में अध्ययन अध्यापन के लिए पाठ से संबंधित उपयुक्त दृक-श्राव्य सामग्री उपलब्ध कराई जाएगी।

प्रथमावृत्ति : 2018



**गणित विषयतज्ज्ञ समिति**

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. विनायक गोडबोले (सदस्य)
श्रीमती प्राजक्ती गोखले (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती पूजा जाधव (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

**गणित विषय - राज्य अभ्यासगट सदस्य**

श्रीमती जयश्री पुरंदरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. सुरेश दाते
श्री. उमेश रेळे
श्री. बन्सी हावळे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सुनिल श्रीवास्तव
श्री. अन्सारी अब्दुल हमीद
श्री. अन्सार शेख
श्रीमती तरुबेन पोपट
श्री. प्रमोद ठोंबरे
डॉ. भारती सहस्रबुद्धे
श्रीमती स्वाती धर्माधिकारी
श्री. प्रताप काशिद
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. आण्णापा परीट
श्री. गणेश कोलते
श्री. रामा व्हन्याळकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. वसंत शेवाळे
श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. मल्लेशाम बेथी
श्रीमती आर्या भिडे

**मुखपृष्ठ व संगणकीय आरेखन**

श्री. संदीप कोळी, चित्रकार, मुंबई

**अक्षरजुळणी**

मुद्रा विभाग, पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे

**प्रमुख संयोजक**

**उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडल, पुणे.

**अनुवाद एवं समीक्षण :**

श्री. अरविंदकुमार तिवारी
श्री. सुनील श्रीवास्तव
श्री. लीलाराम बोपचे
श्री. धीरज शर्मा
श्रीमती. मुकुल बापट

**निर्मिति**

**सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिति अधिकारी
**संजय कांबळे**
निर्मिति अधिकारी
**प्रशांत हरणे**
सहायक निर्मिति अधिकारी

**कागज**

७० जी.एस.एम.क्रीमवोव्ह

**मुद्रणादेश**

N/PB/2018-19/20,000

**मुद्रक**

SOHAIL ENTERPRISES, THANE

**प्रकाशक**

**विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक**
पाठ्यपुस्तक निर्मिति मंडल,
प्रभादेवी, मुंबई २५

# भारत का संविधान

## उद्देशिका

**हम, भारत के लोग,** भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न समाजवादी पंथनिरपेक्ष लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए, तथा उसके समस्त नागरिकों को :

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय,**

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म

और उपासना की **स्वतंत्रता,**

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**

प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन सब में

व्यक्ति की गरिमा और राष्ट्र की एकता

और अखंडता सुनिश्चित करने वाली **बंधुता**

बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हजार छह विक्रमी) **को एतद् द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं ।**

## राष्ट्रगीत

जनगणमन – अधिनायक जय हे
भारत – भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत – भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

## प्रतिज्ञा

भारत मेरा देश है । सभी भारतीय मेरे भाई–बहन हैं ।

मुझे अपने देश से प्यार है । अपने देश की समृद्ध तथा विविधताओं से विभूषित परंपराओं पर मुझे गर्व है ।

मैं हमेशा प्रयत्न करूँगा/करूँगी कि उन परंपराओं का सफल अनुयायी बनने की क्षमता मुझे प्राप्त हो ।

मैं अपने माता–पिता, गुरुजनों और बड़ों का सम्मान करूँगा/करूँगी और हर एक से सौजन्यपूर्ण व्यवहार करूँगा/करूँगी ।

मैं प्रतिज्ञा करता/करती हूँ कि मैं अपने देश और अपने देशवासियों के प्रति निष्ठा रखूँगा/रखूँगी । उनकी भलाई और समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है ।

## प्रस्तावना

विद्‍यार्थी मित्रों,

आप सभी का आठवीं कक्षा में स्वागत है । आपने पहली से सातवीं कक्षा तक की गणित की पाठ्‍यपुस्तक का अध्ययन किया है । आठवीं की गणित की पाठ्‍यपुस्तक आपके हाथ में देते हुए हमें आनंद हो रहा है ।

यह विषय आपको सरलता से समझ में आए, मनोरंजक लगे इसके लिए पाठ्‍यपुस्तक में कुछ कृतियाँ एवं रचनाएँ दी गई हैं उन्हें आप अवश्य करके देखें । उसके संबंध में आपस में चर्चा करें । इससे गणित के कुछ नये गुणधर्म आपको समझ में आएँगे ।

ऐसी अपेक्षा है कि पाठ्‍यपुस्तक के प्रत्येक प्रकरण को ध्यान से पढ़ा जाय । यदि कोई भाग समझ में न आए तो शिक्षक, पालक अथवा वरिष्ठ विद्‍यार्थियों की सहायता से समझ लें । इसके लिए सूचना एवं तंत्रज्ञान की मदद लें । प्रत्येक प्रकरण के अंत में 'क्यू आर कोड' दिया गया है, उसका भी उपयोग कीजिए ।

पाठ के घटकों का विवरण समझने के पश्चात प्रश्नसंग्रह के प्रश्नों को हल कीजिए । अभ्यास के द्‍वारा घटकों के महत्वपूर्ण मुद्‍दे अच्छी तरह से समझ में आएँगे तथा ध्यान में रहेंगे । प्रश्नसंग्रह के उदाहरणों की तरह अन्य उदाहरण आप भी बना सकेंगे । प्रश्नसंग्रह के तारांकित प्रश्न थोड़े चुनौतीपूर्ण हैं । उन्हें भी अवश्य हल करें ।

गणित के अध्ययन में कई बार दी गई सूचना यदि कम लगती है तो तर्कपूर्ण विचार द्‍वारा अधिक निष्कर्ष प्राप्त होता है । उदाहरण के लिए त्रिभुजों के सर्वांगसमता की कसौटी । आगे के अध्ययन में इन कसौटियों का उपयोग निरंतर होता है । इनका अच्छी तरह से अध्ययन करें ।

जीवन के आर्थिक व्यवहार में प्रयोग किए जानेवाले चक्रवृद्‍धि ब्याज, छूट - कमीशन, विचरण, नियमित एवं अनियमित विभिन्न आकृतियों का क्षेत्रफल, कुछ त्रिमितीय आकारों का घनफल इत्यादि इस पुस्तक में समझाए गये हैं ।

गणित का अध्ययन करते हुए पहले की कक्षाओं में सीखे ज्ञान का प्रयोग करना पड़ता है, इसलिए विभिन्न घटकों के महत्वपूर्ण सूत्र, गुणधर्म इत्यादि 'मैंने यह समझा' शीर्षक के अंतर्गत चौखट में दिया गया है । उन्हें अवश्य ध्यान में रखें ।

आठवीं कक्षा प्राथमिक शिक्षण का अंतिम वर्ष है । इस वर्ष अच्छी तरह से अध्ययन करके माध्यमिक शिक्षण के लिए नौंवी कक्षा में आत्मविश्वास के साथ प्रवेश कीजिए । उसके लिए आपको हार्दिक शुभेच्छा ।

**(डा. सुनिल मगर)**
**संचालक**
महाराष्ट्र राज्य पाठ्‍यपुस्तक निर्मिति एवं
अभ्यासक्रम संशोधन मंडल, पुणे.

**पुणे**
**दिनांक :** १८ अप्रैल २०१८, अक्षय्य तृतीया
**भारतीय सौर दिनांक :** २८ चैत्र १६४१

## कक्षा आठवीं – गणित अध्ययन निष्पत्ति (परिणाम)

| अध्ययन के लिए सुझायी गई शैक्षणिक प्रक्रिया | अध्ययन परिणाम |
|---|---|
| **अध्ययनकर्ता को अकेले/ जोड़ी में अवसर देकर कृति करने के लिए प्रवृत्त करना ।**<br>• परिमेय संख्याओं पर सभी क्रियाओं सहित उदा. खोजना तथा उनकी क्रियाओ में आकृतिबंध खोजना ।<br>• वर्गसंख्या, वर्गमूल, घनसंख्या, घनमूल में आकृतिबंध खोजकर पूर्णांको के घातांको के लिए नियम खोजना ।<br>• सरल समीकरण बना सके ऐसी परिस्थिति उपलब्ध कराना तथा सरल पद्धति का उपयोग कर उन्हें हल करने के लिए प्रोत्साहित करना ।<br>• संख्याओं के वितरण गुणधर्मों पर आधारित, दो बैजिक पद या बहुपदी के गुणनफल का अनुभव देना तथा विविध बैजिक सर्वसमिकाओं का प्रत्यक्ष उदाहरण से सामान्यीकरण करना ।<br>• दो संख्याओं के गुणखंड ज्ञात करना एवं इस पूर्वज्ञानपर, आधारित कृति की सहायता से बैजिक पदावली के गुणनखंड का परिचय करना ।<br>• प्रतिशत के उपयोग का अंतर्भाव हो ऐसी छूट, लाभ-हानि, साधारण ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज आदि के लिए घटनाओं की पूर्ति करना ।<br>• साधारण ब्याज पर बार-बार ज्ञात कर चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र प्राप्त करते आने के लिए विविध उदाहरण बनाकर देना ।<br>• एक राशि दूसरी राशि पर आधारित हो ऐसी विविध घटनाओं की पूर्ति करना । दोनों राशियाँ एक के साथ दूसरी बढ़ती है । या एक राशि के बढ़ने पर दूसरी कम होती है । ऐसी घटनाएँ पहचानने के लिए प्रोत्साहन देना । उदा. वाहन का वेग बढ़ने पर निश्चित दूरी तय करने के लिए लगनेवाला समय कम होता है ।<br>• विविध चतुर्भुजों के कोण तथा भुजाओं का मापन करना तथा उनमें संबंधों का आकृतिबंध खोजना, उनका सामान्यीकरण कर नियम खोजकर उदाहरणों की जाँच करना ।<br>• समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म, चतुर्भुज की रचना कर, उनके विकर्ण खींचकर भुजा तथा कोणों का मापन कर जाँच करना तथा कारण बताना । | **अध्ययनार्थी**<br>• आकृतिबंध द्वारा परिमेय संख्याओं के जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग के गुणधर्मो का सामान्यीकरण करते हैं ।<br>• दी गई दो परिमेय संख्याओं के मध्य आनेवाली अधिक से अधिक परिमेय संख्या खोजते हैं ।<br>• विविध पद्धति से वर्ग, घन, वर्गमूल, घनमूल ज्ञात करते हैं ।<br>• पूर्णांक घातांक वाले उदाहरण हल करते हैं ।<br>• चरांको का उपयोग कर पहेली तथा दैनिक जीवन में आनेवाले उदाहरण हल करते हैं ।<br>• बैजिक व्यंजकों का गुणनफल ज्ञात करते हैं ।<br>• उदा. $(2x + 5)\ (3x^2 + 7)$ का विस्तार करते हैं ।<br>• दैनिक जीवन में आनेवाली समस्या हल करने के लिए बैजिक सर्वसमिकाओं का उपयोग करते हैं ।<br>• छूट तथा चक्रवृद्धि ब्याज के उदाहरण में लाभ या हानि ज्ञात करने में उपयोगी प्रतिशत की संकल्पना का उपयोग करते हैं ।<br>• अंकित मूल्य तथा प्रत्यक्ष छूट दी गई हो तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करते हैं या विक्रय मूल्य और लाभ दिया गया हो तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करते हैं ।<br>• प्रत्यक्ष विचरण तथा प्रतिलोम विचरण पर आधारित उदाहरण हल करते हैं ।<br>• चतुर्भुज के कोणों के मापों के योग के गुणधर्म का उपयोग कर उदाहरण हल करते हैं ।<br>• समांतर चतुर्भुज के गुणधर्मों की जाँच करते हैं तथा उनमें संबंध कारण देकर स्पष्ट करते हैं ।<br>• कंपास (परकार) तथा स्केल (पटरी) की सहायता से विविध चतुर्भुजों की रचना करते हैं ।<br>• आकृतिबंध की सहायता से ऑयलर के सूत्र की जाँच करते हैं । |

| अध्ययन के लिए सुझायी गई शैक्षणिक प्रक्रिया | अध्ययन प्रतिफल (परिणाम) |
|---|---|
| • भूमितीय साधनों की सहायता से विभिन्न चतुर्भुज की प्रात्यक्षिक देना ।<br>• आलेख कागज पर समलंब चतुर्भुज और अन्य बहुभुजाकृति बनाना और विद्यार्थियों को इकाई वर्ग मापकर उसका क्षेत्रफल निश्चित करना ।<br>• त्रिभुज और आयत (वर्ग) के क्षेत्रफल का उपयोग कर समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना ।<br>• घन और आयताकार लंब बेलन, वृत्ताकार लंब बेलन के पृष्ठफल का सूत्र, आयत, वर्ग और वृत्त के क्षेत्रफल का उपयोग कर ज्ञात करना ।<br>• घन और आयताकार लंब बेलन का घनफल के लिए घन इकाई का उपयोग कर ज्ञात करना ।<br>• सामग्रियों को एकत्र कर उसका वर्गीकरण करना और स्तंभालेख खींचना ।<br>• दी गई सामग्री की प्रतिनिधि मूल्य ज्ञात करना अर्थात सामग्री का माध्य ज्ञात करना ।<br>• सर्वांगसमता की शर्तें पहले निश्चित कर तथा आकृतियों को एक के उपर एक रखकर सर्वांगसमता के गुणधर्म की जाँच करना । | • आलेख कागज या वर्ग बना हुआ कागज का उपयोग कर बहुभुजाकृति और समलंब चतुर्भुज का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करना और सूत्र का उपयोग कर जाँच करना ।<br>• बहुभुजाकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं ।<br>• आयताकार लंब बेलन तथा वृत्ताकार लंब बेलन आकार की वस्तु का पृष्ठफल तथा घनफल ज्ञात करते हैं ।<br>• स्तंभालेख का वाचन करते हैं तथा अर्थ विश्लेषण करते हैं ।<br>• दो समांतर रेखाओं के तिर्यक रेखा द्‌वारा बने कोणों की जोड़ियों के गुणधर्म की जाँच कर देखना ।<br>• भुभुभु, भुकोभु, कोभुको इन कसौटियों का उपयोग कर त्रिभुज की सर्वांगसमता स्पष्ट करते हैं ।<br>• वर्ग बना हुआ कागज या आलेख कागज का उपयोग कर बंद आकृति का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं ।<br>• दैनिक व्यवहार में सांख्यिकीय जानकारी से माध्य ज्ञात करते हैं ।<br>• दी गई रेखा के समांतर रेखा खींचने की रचना करते हैं । |

## शिक्षकों के लिए मार्गदर्शक मुद्‌दे

कक्षा आठवीं की पाठ्‌यपुस्तक का उपयोग कक्षा में प्रश्न-उत्तर, कृति, चर्चा तथा विद्‌यार्थियों से संवाद ऐसे विविध माध्यम से होने आवश्यक हैं । इसके लिए पाठ्‌यपुस्तक का गहन वाचन करें । वाचन करते समय अध्यापन की दृष्टि से महत्त्वपूर्ण वाक्य अधोरेखित करें । इसका संदर्भ समझने के लिए पिछली तथा आगामी कक्षाओं की पाठ्‌यपुस्तक तथा अन्य साहित्य का अभ्यास करें । इसके लिए क्यू. आर. कोड पर की जानकारी उपयोगी होंगी ।

पुस्तक में अपना परिसर, भूगोल, विज्ञान, अर्थशास्त्र इन सभी विषयों का गणित से समन्वय किया है । ऐसे अनेक विषयों में गणित की संकल्पना का उपयोग होता है । यह शिक्षक विद्‌यार्थियों को दिखायें । शिक्षक उपक्रम, प्रकल्प तथा प्रात्यक्षिक करवा लें । इससे गणित का व्यवहार में उपयोग स्पष्ट होगा तथा उन्हें सीखने का महत्त्व विद्‌यार्थियों को समझ में आएगा । गणित की संकल्पना का स्पष्टीकरण आसान भाषा में दिया गया है । प्रश्नसंग्रह में दिये गये उदाहरण पर आधारित अनेक उदाहरण शिक्षकों द्‌वारा बनाकर विद्‌यार्थियों को हल करने को दिया जाय तथा उन्हे भी नये उदाहरण बनाने के लिए प्रोत्साहित करें ।

विद्‌यार्थियों के किए कुछ चुनौतिपूर्ण प्रश्न तारांकित स्वरूप में दिए गए हैं । अधिक जानकारी के लिए इस शीर्षक के अंतर्गत अधिक जानकारी की गयी है । यह जानकारी गणित के आगामी अभ्यास करते समय विद्‌यार्थियों के लिए निश्चित ही उपयोगी होंगी । गणित विषय की कक्षा 8 वीं की यह पाठ्‌यपुस्तक आपको निश्चित ही पसंद आयेगी ।

# अनुक्रमणिका

## विभाग 1



## विभाग 2

# 1 परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ

**थोड़ा याद करें**

हमने प्राकृत संख्या समूह, पूर्ण संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह और परिमेय संख्या समूह की पहचान कर ली ।

| प्राकृत संख्या समूह | पूर्ण संख्या समूह | पूर्णांक संख्या समूह |
|---|---|---|
| 1,2,3,4,... | 0,1,2,3,4, ... | ...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,... |

**परिमेय संख्या समूह**

$\frac{-25}{3}, \frac{10}{-7}, -4, 0, 3, 8, \frac{32}{3}, \frac{67}{5}$, आदि

**परिमेय संख्या समूह :** $\frac{m}{n}$ इस स्वरुपवाली संख्या को परिमेय संख्या कहते हैं । यहाँ $m$ तथा $n$ पूर्णांक होते हैं परंतु $n$ शून्येतर संख्या होती है ।

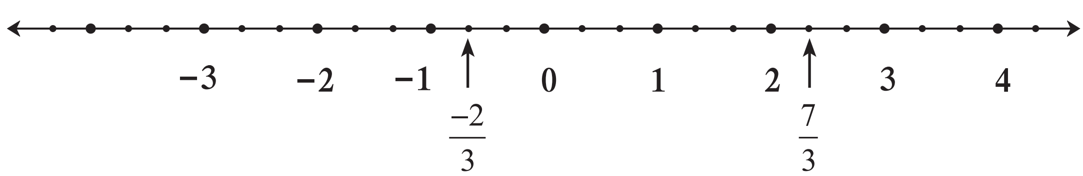
हमने देखा है कि दो परिमेय संख्याओं के मध्य असंख्य परिमेय संख्याएँ होती हैं ।

**आओ जानें**

## संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं का निरुपण (To show rational numbers on a number line)

संख्याएँ $\frac{7}{3}$, 2, $\frac{-2}{3}$ संख्यारेखा पर कैसे दर्शाते हैं ? देखेंगे ।

सर्वप्रथम एक संख्यारेखा खींचिए ।




- 2 यह परिमेय संख्या पूर्णांक भी है । इसे संख्यारेखा पर निरुपित करेंगे ।
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, अर्थात शून्य के दाईं ओर प्रत्येक इकाई के तीन समान भाग करेंगे । शून्य से सातवाँ बिंदु $\frac{7}{3}$ यह संख्या दर्शाएगा; या $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, अर्थात इस संख्या के आगे $\frac{1}{3}$ इकाई दूरी पर स्थित बिंदु $\frac{7}{3}$ यह संख्या दर्शाएगा ।

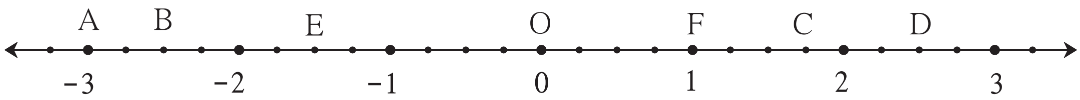
- संख्यारेखापर $\frac{-2}{3}$ यह संख्या दर्शाने के लिए, पहले $\frac{2}{3}$ यह संख्या दिखाकर 0 के बायीं ओर उतने ही अंतर पर $\frac{-2}{3}$ यह संख्या दर्शाई जायेगी ।

## प्रश्नसंग्रह 1.1

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर निरुपित कर प्रत्येक के लिए अलग संख्यारेखा खींचिए ।

   (1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$  (2) $\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}$  (3) $\frac{-5}{8}, \frac{11}{8}$  (4) $\frac{13}{10}, \frac{-17}{10}$

2. निम्नलिखित आकृति का निरीक्षण करके पूछे गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।




   (1) बिंदु B कौन-सी परिमेय संख्या दर्शाता है ?  (2) $1\frac{3}{4}$ यह संख्या कौन-से बिंदु से दर्शाई गई है ?

   (3) 'बिंदु D द्वारा संख्या $\frac{5}{2}$ निरुपित की गई है ।' यह कथन सत्य है या असत्य, लिखिए ।

### आओ जानें

### परिमेय संख्याओं में क्रमसंबंध (Comparison of rational numbers)

हम जानते हैं कि संख्यारेखा पर संख्या के प्रत्येक युग्म में, बायीं ओर की संख्या दाई ओर की संख्या से छोटी होती है । उसी प्रकार परिमेय संख्या के अंश तथा हर को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा करें तो संख्या वही रहती है या उसका मान नही बदलता, अर्थात $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, $(k \neq 0)$ ।

**उदा. (1)** संख्या $\frac{5}{4}$ तथा $\frac{2}{3}$ में क्रमसंबध निश्चित कीजिए । <, =, > इनमें से सही चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

**हल** : $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$  $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$

$\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$  $\therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

**उदा. (2)** परिमेय संख्या $\frac{-7}{9}, \frac{4}{5}$ की तुलना कीजिए ।

**हल** : ऋणात्मक संख्या हमेशा धनात्मक संख्या से छोटी होती है अर्थात $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$ .

**दो ऋणात्मक संख्यांओं की तुलना करने के लिए**

$a, b$ धनात्मक संख्या हो तथा यदि $a < b$, तो $-a > -b$ इसका अनुभव लेंगे ।

$2 < 3$ किंतु $-2 > -3$

$\frac{5}{4} < \frac{7}{4}$ किंतु $\frac{-5}{4} > \frac{-7}{4}$

} इनकी संख्यारेखा पर जाँच करो ।

**उदा. (3)** $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}$ की तुलना कीजिए ।

**हल** : सर्वप्रथम $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{2}$ की तुलना करेंगे ।

$\frac{7}{3} = \frac{7\times 2}{3\times 2} = \frac{14}{6}$, $\quad \frac{5}{2} = \frac{5\times 3}{2\times 3} = \frac{15}{6}$ $\quad$ तथा $\quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$

$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2}$ $\quad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$

**उदा. (4)** परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{6}{10}$ की तुलना कीजिए ।

**हल** : $\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}$ $\quad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

**परिमेय संख्याओं की तुलना करते समय निम्नलिखित नियम उपयोगी होते हैं ।**

$\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याओं में यदि $b$ और $d$ धनात्मक हों और

(1) यदि $a \times d < b \times c$ तो $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) यदि $a \times d = b \times c$ तो $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) यदि $a \times d > b \times c$ तो $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

## प्रश्नसंग्रह 1.2

1. निम्नलिखित संख्याओं में क्रमसंबध निश्चित कीजिए ।

(1) $-7, -2$ $\quad$ (2) $0, \frac{-9}{5}$ $\quad$ (3) $\frac{8}{7}, 0$ $\quad$ (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ $\quad$ (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}, \frac{-13}{20}$ $\quad$ (7) $\frac{15}{12}, \frac{7}{16}$ $\quad$ (8) $\frac{-25}{8}, \frac{-9}{4}$ $\quad$ (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ $\quad$ (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$

## आओ जानें

### परिमेय संख्याओं के दशमलव रुप (Decimal representation of rational numbers)

परिमेय संख्या के अंश को हर से भाग देते समय दशमलव अपूर्णांक का उपयोग किया तो उस संख्या का दशमलव रुप प्राप्त होता है । उदाहरणार्थ, $\frac{7}{4} = 1.75$, यहाँ 7 को 4 से भाग देने पर शेषफल शून्य आया । भाग की संक्रिया पूर्ण हुई है ।

परिमेय संख्या के ऐसे दशमलवरुप को खंडित (अवसानी) दशमलव रुप कहते हैं ।

हम जानते हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या को अखंड आवर्ती (अनवसानी) दशमलव के रुप में लिख सकते हैं ।

**उदाहरणार्थ,** (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

उसी प्रकार $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ इस प्रकार शून्य का उपयोग कर खंडित रुप को भी अखंडित आवर्ती दशमलव रुप में लिख सकते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 1.3

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को दशमलव रुप में लिखिए ।

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

## आओ जानें

### अपरिमेय संख्याएँ (Irrational numbers)

परिमेय संख्याओं के अतिरिक्त और भी अनेक संख्याएँ संख्यारेखा पर होती हैं । वे परिमेय नहीं होती, अर्थात वे अपरिमेय होती हैं । $\sqrt{2}$ ऐसी ही एक अपरिमेय संख्या है ।

हम $\sqrt{2}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाएँगे ।

- संख्यारेखा पर बिंदु A संख्या 1 दर्शाता है । संख्यारेखा पर बिंदु A से रेखा $l$ लंब खीचें ।

  रेखा $l$ पर बिंदु P ऐसा लें कि OA = AP = 1 इकाई हो ।

- रेख OP खींचने पर समकोण $\Delta$ OAP तैयार होता है ।

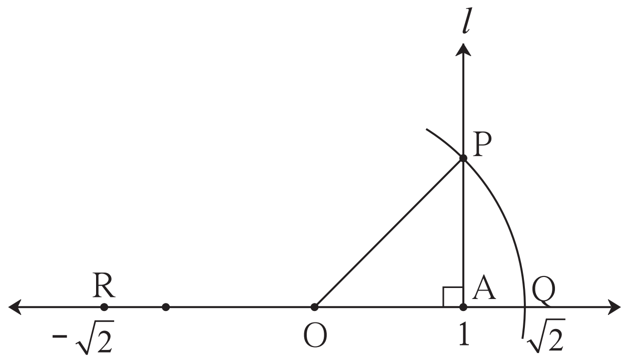
पाइथागोरस के प्रमेयानुसार,

$OP^2 = OA^2 + AP^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$OP^2 = 2$

$\therefore\ OP = \sqrt{2}$ ...(दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर)




- अब O केंद्र तथा OP के बराबर त्रिज्या लेकर एक चाप खींचे । वह चाप संख्यारेखा पर जहाँ प्रतिच्छेदित करता है, उस बिंदु को Q नाम दें OQ की दूरी $\sqrt{2}$ है ।

अर्थात $\sqrt{2}$ यह संख्या, संख्यारेखा पर बिंदु Q से दर्शाई गई हैं ।

OQ जितना अंतर कंपास में लेकर 'O' के बायीं ओर बिंदु R स्थापित किया, तो उस बिंदु से दर्शाने वाली संख्या $-\sqrt{2}$ होगी ।

अगली कक्षा में हम सिद्ध करेंगे कि, $\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । अपरिमेय संख्या का दशमलव रुप अखंड और अनावर्ती होता है यह भी हम अगली कक्षा में देखेंगे ।

**ध्यान में रखें कि ;**

पिछली कक्षा में हमने सीखा है कि $\pi$ यह परिमेय संख्या नहीं है । अर्थात वह अपरिमेय संख्या है । हम व्यवहार में सुविधा के लिए $\pi$ का बहुत ही नजदीक का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 यह $\pi$ के लिए लेते हैं । किंतु संख्या $\frac{22}{7}$ तथा 3.14 परिमेय है ।

जो संख्याएँ संख्यारेखा पर बिंदु से दर्शाते हैं उन संख्याओं को वास्तविक संख्या कहते हैं । हमने देखा है कि सभी परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं । इसलिए सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं । उसी प्रकार अनंत अपरिमेय संख्याएँ भी वास्तविक संख्याएँ हैं ।

$\sqrt{2}$ यह अपरिमेय संख्या है । $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ आदि सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं, इसे ध्यान में रखें । कारण यदि $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या हो तो $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ भी परिमेय संख्या होनी चाहिए । परंतु यह सत्य नहीं है ।

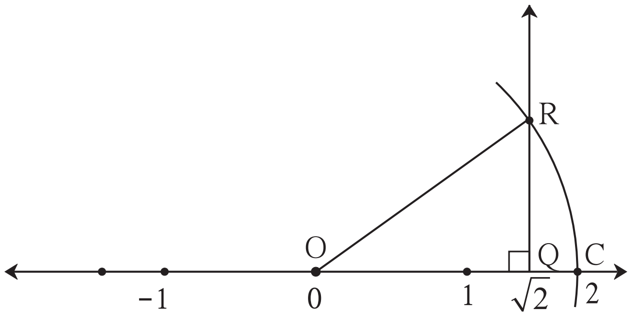
हमने देखा है कि परिमेय संख्याओं को संख्यारेखा पर कैसे दर्शाते हैं । उसी प्रकार $\sqrt{2}$ इस अपरिमेय संख्या को संख्यारेखा पर निरुपित किया है । उसी प्रकार हम $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . ऐसी अपरिमेय संख्याएँ भी संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 1.4

1. $\sqrt{2}$ संख्या संख्यारेखा पर दर्शाई हैं । उसी प्रकार $\sqrt{3}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाने के लिए निम्नलिखित कृति के सोपान दिए गए हैं । उन सोपानों में रिक्त स्थानों की उचित पूर्ति कर कृति पूर्ण कीजिए ।

**कृति :**

- संख्यारेखा पर बिंदु Q ...... यह संख्या दर्शाता है ।
- बिंदु Q से एक लंब रेखा खींची गई है । इस रेखा पर 1 इकाई लंबाई दर्शाने वाला बिंदु R है ।
- OR जोड़ने पर समकोण $\Delta$ ORQ प्राप्त होता है ।
- $l(OQ) = \sqrt{2}$ , $l(QR) = 1$




$\therefore$ पाइथागोरस के प्रमेयानुसार,

$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$

$= \boxed{\phantom{00}}^2 + \boxed{\phantom{00}}^2 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$

$= \boxed{\phantom{00}}$ $\therefore l(OR) = \boxed{\phantom{00}}$

OR के बराबर अंतर लेकर खींचा गया चाप जहाँ संख्यारेखा को प्रतिच्छेदित करता है उस बिंदु को C नाम दें । बिंदु C यह $\sqrt{3}$ इस संख्या को दर्शाता है ।

**2.** $\sqrt{5}$ इस संख्या को संख्यारेखा पर दर्शाऐं ।

**3★.** संख्या $\sqrt{7}$ संख्यारेखा पर दर्शाऐं ।

## उत्तर सूची

### प्रश्नसंग्रह 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) सत्य

### प्रश्नसंग्रह 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

### प्रश्नसंग्रह 1.3

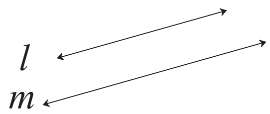
(1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}\ldots$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) $-20.\dot{6}$

(5) $-0.\overline{846153}$

# 2 समांतर रेखा तथा तिर्यक रेखा

**थोड़ा याद करें**

एक ही प्रतल में स्थित तथा परस्पर प्रतिच्छेदित न करने वाली रेखाओं को समांतर रेखाएँ कहते हैं ।

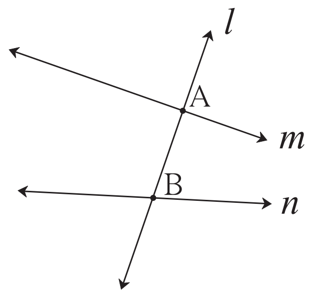



'रेखा $l$ तथा रेखा $m$ समांतर रेखाएँ हैं ।' इसे 'रेखा $l \parallel$ रेखा $m$' लिखते हैं ।

**आओ जानें**

## तिर्यक रेखा (Transversal)

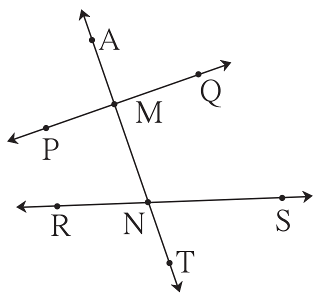
संलग्न आकृति में रेखा $m$ तथा रेखा $n$ को रेखा $l$ क्रमश: बिंदु A तथा B दो अलग-अलग बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हैं । रेखा $l$ रेखा $m$ तथा रेखा $n$ की तिर्यक रेखा है ।




**यदि कोई रेखा दी गई दो रेखाओं को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करती हो, तो उस रेखा को उन दो रेखाओं की तिर्यक रेखा कहते हैं ।**

## तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित कोण (Angles made by transversal)

संलग्न आकृति में तिर्यक रेखा द्वारा बिंदु M पर चार तथा बिंदु N पर चार, ऐसे कुल 8 कोण निर्मित होते हैं । आठों कोणों में से प्रत्येक कोण की एक भुजा तिर्यक रेखा पर है तथा दूसरी भुजा दो रेखाओं में से किसी एक रेखा पर है । इसका उपयोग करके कोणों की जोड़ियाँ निश्चित की गई हैं । उनमें से कुछ जोड़ियों का अध्ययन करेंगे ।




- **संगत कोण** (Corresponding angles)

कोणों की ऐसी जोड़ी जिसमें तिर्यक रेखा पर स्थित भुजा एक ही दिशा दर्शाती हो तथा तिर्यक रेखा पर न हो ऐसी भुजा छेदन रेखा के एक ही ओर स्थित हो तो कोणों की ऐसी जोड़ी को संगत कोण कहते हैं ।

- **अंत:कोण** (Interior angles)

कोणों की ऐसी जोड़ी जो दी गई रेखाओं के अंत: भाग में हो तथा तिर्यक के एक ही ओर हो, वह अंत: कोणों की जोड़ी होती है ।

उपरोक्त आकृति में संगत कोणों की जोडियाँ –

(i) ∠AMP तथा ∠MNR

(ii) ∠PMN तथा ∠RNT

(iii) ∠AMQ तथा ∠MNS

(iv) ∠QMN तथा ∠SNT

उपरोक्त आकृति में अंत: कोणों की जोड़ियाँ –

(i) ∠PMN तथा ∠MNR

(ii) ∠QMN तथा ∠MNS

### • एकांतर कोण (Alternate angles)

कोणों की ऐसी जोड़ी जिसमें दोनों कोण तिर्यक रेखा के विपरीत ओर हों तथा उनकी तिर्यक रेखा पर स्थित भुजा विपरित दिशा दर्शाती हो तो, वह एकांतर कोणों की जोड़ी होती है ।

आकृति में दो जोड़ियाँ अंत: एकांतर कोणों की तथा दो जोडियाँ बाह्य एकांतर कोणों की हैं ।

अंत: एकांतर कोणों की जोड़ियाँ

(रेखाओं के अंत: भाग में स्थित कोण)

(i) ∠PMN तथा ∠MNS

(ii) ∠QMN तथा ∠RNM

बाह्य एकांतर कोणों की जोड़ियाँ

(रेखाओं के बाह्य भाग में स्थित कोण)

(i) ∠AMP तथा ∠TNS

(ii) ∠AMQ तथा ∠RNT

## प्रश्नसंग्रह 2.1

1. संलग्न आकृति देखें । आकृति में कोणों के नाम एक अक्षर से दिये गये हैं इसके आधार पर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

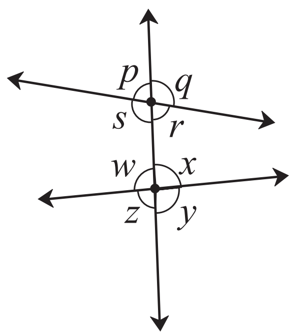
संगत कोणों की जोड़ियाँ

(1) $\angle p$ तथा ☐ (2) $\angle q$ तथा ☐

(3) $\angle r$ तथा ☐ (4) $\angle s$ तथा ☐

अंत: एकांतर कोणों की जोड़ियाँ

(5) $\angle s$ तथा ☐ (6) $\angle w$ तथा ☐

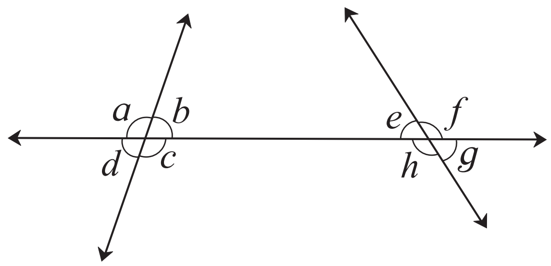



2. संलग्न आकृति में दर्शाए गए कोण देखिए ।
निम्नलिखित जोड़ियाँ दर्शाने वाले कोण लिखिए ।

(1) अंत: एकांतर कोण

(2) संगत कोण

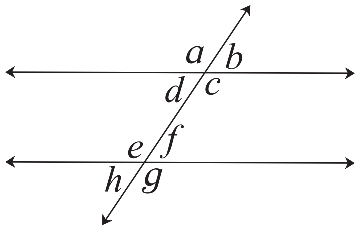
(3) अंत: कोण



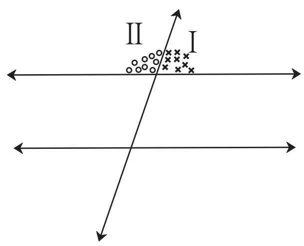
## आओ जानें

### दो समांतर रेखाओं तथा तिर्यक रेखा द्‌वारा निर्मित कोण तथा उनके गुणधर्म
### (Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

**कृति (I) :** आकृति (A) में दर्शाए अनुसार किसी कागज पर दो समांतर रेखाएँ खींचिए तथा उनकी एक तिर्यक रेखा खींचिए । ट्रेस पेपर की सहायता से उसी आकृति की एक प्रति एक कोरे कागज पर बनाइए । अब आकृति (B) में दर्शाएनुसार भाग I तथा भाग II में अलग-अलग रंग भरीए । वे दोनों भाग कैंची से काँटिए ।




(A)




(B)

भाग I तथा भाग II द्‌वारा दर्शाए कोण रेखीय युगल कोण हैं, इसे ध्यान में रखिए । अब भाग I तथा भाग II को आकृति A के 8 कोणों में से प्रत्येक कोण पर रखकर देखिए ।

किन-किन कोणों से भाग I हूबहू मिलता है ? तथा

किन-किन कोणों से भाग II हूबहू मिलता है ?

ऐसा दिखेगा कि, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, क्योंकि ये कोण भाग I से मिलते हैं ।

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, क्योंकि ये कोण भाग II से मिलते हैं ।

(1) $\angle a \cong \angle e$, $\angle b \cong \angle f$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle d \cong \angle h$

(यह संगत कोणों की जोड़ियाँ हैं)

(2) $\angle d \cong \angle f$ और $\angle e \cong \angle c$ (यह अंत: एकांतर कोणों की जोड़ियाँ हैं)

(3) $\angle a \cong \angle g$ और $\angle b \cong \angle h$ (यह बाह्य एकांत कोणों की जोड़ियाँ हैं)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$ और $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$

(यह अंत: कोणों की जोड़ियाँ हैं)

## आओ चर्चा करें

दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्‌वारा प्रतिच्छेदित करने पर आठ कोण बनते हैं ।

इन आठ कोणों में से एक कोण का माप दिया गया हो तो क्या अन्य सात कोणों के माप ज्ञात कर सकते हैं ?

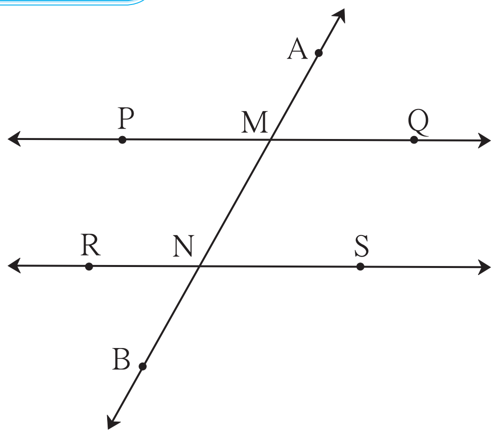
## आओ जानें

### (1) संगत कोणों का गुणधर्म (Property of corresponding angles)

समांतर रेखाओं की तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित संगत कोणों की प्रत्येक जोड़ी के कोण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

संलग्न आकृति में रेखा PQ || रेखा RS ।

रेखा AB उनकी तिर्यक रेखा है ।




संगत कोण

$\angle AMP \cong \angle MNR$ $\quad$ $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$ $\quad$ $\angle QMN \cong \angle SNB$

### (2) एकांतर कोणों का गुणधर्म (Property of alternate angles)

समांतर रेखाओं के तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित एकांतर कोणों की प्रत्येक जोड़ी के कोण परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

| अंत: एकांतर कोण | बाह्य एकांतर कोण |
|---|---|
| $\angle PMN \cong \angle MNS$ | $\angle AMP \cong \angle SNB$ |
| $\angle QMN \cong \angle MNR$ | $\angle AMQ \cong \angle RNB$ |

### (3) अंत: कोणों का गुणधर्म (Property of interior angles)

समांतर रेखाओं की तिर्यक रेखा द्वारा निर्मिति अंत: कोणों की प्रत्येक जोड़ी के कोण के मापों का योग 180° होता है ।

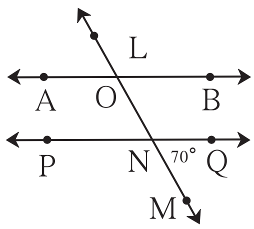
अंत: कोण

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180°$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180°$

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** संलग्न आकृति में रेखा AB || रेखा PQ, तथा रेखा LM तिर्यक रेखा है $m\angle MNQ = 70°$, तो $\angle AON$ का माप ज्ञात कीजिए ।




**हल :**

**विधि I**

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70°$ .....(शीर्षाभिमुख कोण)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180°$ ....(अंत: कोण)

$\therefore\ m\angle AON = 180° - m\angle ONP$

$= 180° - 70°$

$= 110°$

**विधि II**

$m\angle MNQ = 70°$

$\therefore\ m\angle NOB = 70°$ ....(संगत कोण)

$m\angle AON + m\angle NOB = 180°$

$\therefore\ m\angle AON + 70° = 180°$

$\therefore\ m\angle AON = 110°$

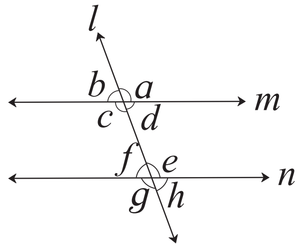
(कुछ अलग सोचकर भी उपरोक्त उदाहरण हल कर सकते हैं ।)

**उदा. (2)** संलग्न आकृति में रेखा $m \parallel$ रेखा $n$

रेखा $l$ तिर्यक रेखा है ।

यदि $m\angle b = (x + 15)^\circ$ तथा

$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ हो तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए ।




**हल :** $\angle b \cong \angle f$ .......... (संगत कोण) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ .......... (रेखीय युगल कोण)

समीकरण में मान रखने पर,

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$ $\therefore 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ$ ......... (दोनों पक्षों में से 30 घटाने पर)

$x = \frac{150^\circ}{3}$ ......... (दोनों पक्षों में 3 से भाग देने पर)

$\therefore x = 50^\circ$

### मैंने यह समझा

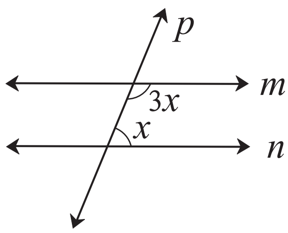
दो समांतर रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित कोणों में

- संगत कोणों की जोड़ी के कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- एकांतर कोणों की जोड़ी के कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- अंत: कोण के प्रत्येक जोड़ी के कोण परस्पर संपूरक होते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 2.2

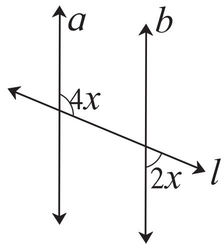
1. उचित विकल्प चुनिए ।

(1) संलग्न आकृति में यदि रेखा $m \parallel$ रेखा $n$ हो तथा रेखा $p$ उनकी तिर्यक रेखा हो तो $x$ का मान कितना होगा ?

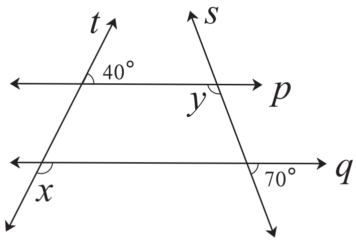



(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°

(2) संलग्न आकृति में यदि रेखा $a \parallel$ रेखा $b$ और रेखा $l$ यह उसकी तिर्यक रेखा हो तो $x$ का मान कितना होगा?

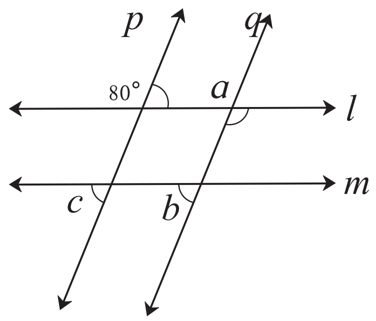


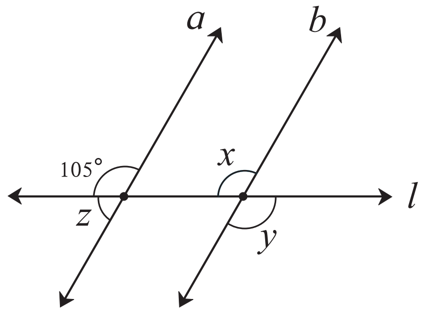

(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°




2. संलग्न आकृति में रेखा $p \parallel$ रेखा $q$ है । रेखा $t$ तथा रेखा $s$ तिर्यक रेखाएं हैं । दिए गए मापों के आधार पर $\angle x$ तथा $\angle y$ के माप ज्ञात कीजिए ।

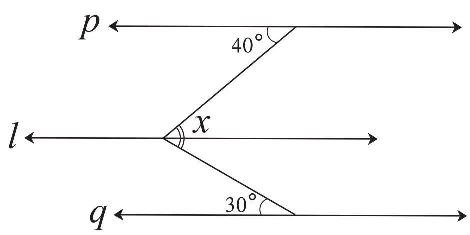
3. संलग्न आकृति में रेखा $p \parallel$ रेखा $q$ है । रेखा $l \parallel$ रेखा $m$ है । दिए गए कोणों के मापों के आधार पर $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ के माप ज्ञात कीजिए । तथा कारण भी लिखिए ।




4. संलग्न आकृति में रेखा $a \parallel$ रेखा $b$ रेखा $l$ तिर्यक रेखा है । दिए गए कोणों के मापों के आधार पर $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ के माप ज्ञात कीजिए ।

5★. संलग्न आकृति में रेखा $p \parallel$ रेखा $l \parallel$ रेखा $q$ दिए गए मापों के आधार पर $\angle x$ का माप ज्ञात कीजिए ।




**अधिक जानकारी हेतु :**

दो एकप्रतलीय रेखाओं को किसी तिर्यक रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित करने पर निर्मित

- संगत कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ समांतर होती हैं ।
- एकांतर कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम हो तो वे रेखाएँ समांतर होती हैं ।
- अंत:कोणों की एक जोड़ी संपूरक हो तो वे रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं ।

## दी गई रेखा के समांतर रेखा खींचना (To draw a line parallel to the given line)

**रचना (I) : दी गई रेखा को उस रेखा के बाह्य भाग में स्थित बिंदु से जाने वाली समांतर रेखा की रचना गुनिए की सहायता से करना ।**

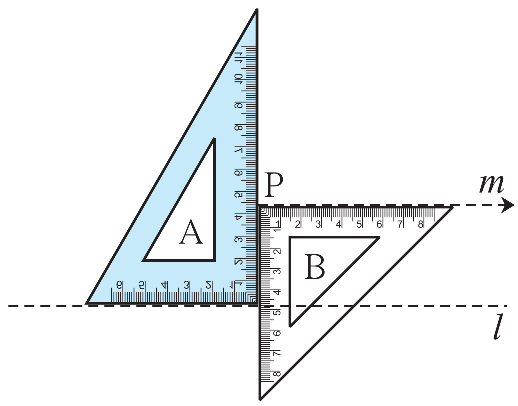
**विधि I :** रचना के सोपान

(1) रेखा $l$ खींचो । (2) रेखा $l$ के बाह्य भाग में बिंदु P लीजिए ।

(3) आकृति में दर्शाएनुसार दो गोनिए चिपकाकर रखिए । गोनिया A तथा B को पकड़कर रखिए । गोनिया B की कोर बिंदु P पर है उस कोर पर रेखा खींचिए ।

(4) उस रेखा को $m$ नाम दीजिए ।

(5) रेखा $m$ यह रेखा $l$ के समांतर है ।



**विधि II** : रचना के सोपान

(1) रेखा $l$ खींचिए । उस रेखा के बाह्य भाग में बिंदु P लीजिए ।

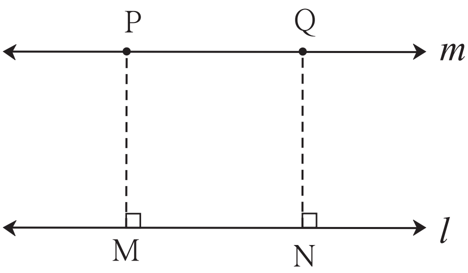
(2) बिंदु P से रेखा $l$ पर रेख PM लंब खींचिए ।

(3) रेखा $l$ पर अन्य बिंदु N लीजिए ।

(4) बिंदु N से रेख NQ रेखा $l$ पर लंब खींचिए ।

NQ = MP लीजिए

(5) बिंदु P तथा Q से होकर जाने वाली $m$ खींचिए । यह रेखा $l$ के समांतर है ।



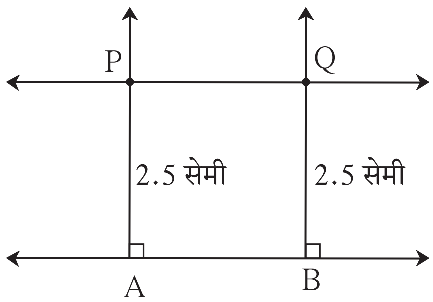

**रचना (II)** : दी गई रेखा से दी गई दूरी पर समांतर रेखा खींचना ।

**कृति** : रेखा $l$ को उस रेखा से 2.5 सेमी दूरी पर समांतर रेखा खींचिए ।

**रचना के सोपान** :

(1) रेखा $l$ खींचिए । (2) रेखा $l$ पर A, B दो बिंदु लीजिए ।

(3) बिंदु A तथा बिंदु B से रेखा $l$ पर लंब खींचिए ।




(4) उस रेखा पर, बिंदु A और बिंदु B से 2.5 सेमी की दूरी पर बिंदु P और बिंदु Q लें ।

(5) रेखा PQ खींचिए । (6) रेखा PQ यह रेखा $l$ की 2.5 सेमी दूरी पर समांतर रहने वाली रेखा है ।

## प्रश्नसंग्रह 2.3

1. रेखा $l$ खींचो । उस रेखा के बाह्य बिंदु A लें । बिंदु A से जाने वाली और रेखा $l$ के समांतर रेखा खींचिए ।
2. रेखा $l$ खींचिए । उस रेखा के बाह्य भाग में बिंदु T लें । बिंदु T से जाने वाली और रेखा $l$ के समांतर रेखा खींचिए ।
3. रेखा $m$ और इस रेखा से 4 सेमी की दूरी पर रहने वाली समांतर रेखा $n$ खींचिए ।

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 2.1** **1.** (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

**2.** (1) $\angle c$ तथा $\angle e$, $\angle b$ तथा $\angle h$

(2) $\angle a$ तथा $\angle e$, $\angle d$ तथा $\angle h$, $\angle b$ तथा $\angle f$, $\angle c$ तथा $\angle g$

(3) $\angle c$ तथा $\angle h$, $\angle b$ तथा $\angle e$.

**प्रश्नसंग्रह 2.2** **1.** (1) C (2) D **2.** $\angle x = 140^\circ$, $\angle y = 110^\circ$

**3.** $\angle a = 100^\circ$, $\angle b = 80^\circ$, $\angle c = 80^\circ$

**4.** $\angle x = 105^\circ$, $\angle y = 105^\circ$, $\angle z = 75^\circ$ **5.** $\angle x = 70^\circ$

CHYHNZ

# 3 घातांक तथा घनमूल

## थोड़ा याद करें

पिछली कक्षाओं में हमने घातांक और उनके नियमों का अध्ययन किया है ।

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ इस गुणन रुपी संख्या को संक्षेप में हम $2^5$ ऐसा लिखते है ।
  यहाँ 2 यह आधार तथा 5 यह घातांक है $2^5$ यह घातांकित संख्या है ।
- घातांक के नियम : $m$ तथा $n$ पूर्णांक संख्या हो, तो
  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$
  (v) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
- घातांक के नियम का उपयोग कर दिए गए उदाहरणों की चौखट में उचित संख्या लिखिए ।
  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$
  (iv) $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$
  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

## आओ जानें

### परिमेय घातांक वाली संख्या का अर्थ (The number with rational index)

**(I) संख्या का घातांक $\frac{1}{n}$ स्वरुप में परिमेय संख्या हो तो ऐसी संख्या का अर्थ ।**

संख्या का घातांक $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}$ इस रुप में परिमेय संख्या हो तो उस संख्या का अर्थ देखेंगे ।
किसी एक संख्या का वर्ग दर्शाने के लिए उसके घात में 2 लिखते हैं और संख्या का वर्गमूल दर्शाने के लिए उसके घात $\frac{1}{2}$ लिखते हैं ।

उदाहरण, 25 का वर्गमूल $\sqrt{\ }$ इस करणी चिह्न का उपयोग कर हम $\sqrt{25}$ ऐसा लिखते हैं । घात का उपयोग कर इसे $25^{\frac{1}{2}}$ ऐसा लिखते हैं, अर्थात $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

साधारणत: $a$ इस संख्या का वर्ग $a^2$ ऐसा लिखते हैं तो $a$ का वर्गमूल $\sqrt[2]{a}$ ऐसा या $\sqrt{a}$ या $a^{\frac{1}{2}}$ ऐसा लिखते हैं ।

इसी प्रकार $a$ इस संख्या का घन $a^3$ ऐसा लिखते हैं तब $a$ का घनमूल $\sqrt[3]{a}$ या $a^{\frac{1}{3}}$ ऐसा लिखते हैं ।

जैसे, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ ।

$\therefore$ 64 का घनमूल $\sqrt[3]{64}$ या $(64)^{\frac{1}{3}}$ ऐसा लिखते हैं ध्यान दो कि, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ । अर्थात 3 का 5 वाँ घात 243 है ।

इसके विपरित 243 के पाँचवे मूल को $(243)^{\frac{1}{5}}$ या $\sqrt[5]{243}$ ऐसा लिखते हैं । $\therefore$ $(243)^{\frac{1}{5}} = 3$

साधारणत: $a$ का $n$ वाँ मूल $a^{\frac{1}{n}}$ ऐसा लिखा जाता है ।

उदाहरण, (i) $128^{\frac{1}{7}}$ =128 का 7 वाँ मूल, (ii) $900^{\frac{1}{12}}$ = 900 का 12 वाँ मूल, आदि ।

ध्यान दो कि $10^{\frac{1}{5}} = x$ यह संख्या हो तब $x^5 = 10$ ।

## प्रश्नसंग्रह 3.1

**1.** घातांक का उपयोग करके नीचे दी हुई संख्याएँ लिखिए ।

(1) 13 का पाँचवाँ मूल (2) 9 का छठा मूल (3) 256 का वर्गमूल

(4) 17 का घनमूल (5) 100 का आठवाँ मूल (6) 30 का सातवाँ मूल

**2.** दी गई घातांकित संख्या कौन-सी संख्याँ का कौन-सा मूल है लिखिए ।

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

### (II) संख्या के घातांक के स्थान पर $\frac{m}{n}$ स्वरुप में परिमेय संख्या हो तो ऐसी संख्या का अर्थ :

आप जानते हैं कि $8^2 = 64$,

64 का घनमूल = $(64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore$ 8 के वर्ग का घनमूल = 4 .......... (I)

इसी प्रकार, 8 का घनमूल = $8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 के घनमूल का वर्ग $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ..........(II)

(I) तथा (II) से

8 के वर्ग का घनमूल = 8 के घनमूल का वर्ग; अर्थात, $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ यह ध्यान में आता है ।

पूर्णांक घातांकों के नियम, परिमेय घातांकों को भी लागू होते हैं ।

$\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ इस नियम का उपयोग कर $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

इस आधार पर $8^{\frac{2}{3}}$ इस संख्या का अर्थ दो प्रकार से लगा सकते हैं ।

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 के वर्ग का घनमूल (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 के घनमूल का वर्ग

इसी प्रकार $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ अर्थात '27 के चौथे घात का पाँचवाँ मूल',

और $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ अर्थात '27 के पाँचवें मूल का चौथा घात' ऐसे दो अर्थ होते हैं ।

सामान्यत: $a^{\frac{m}{n}}$ इस संख्या का अर्थ दो प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं ।

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ अर्थात $a$ के $m$ वें घात का $n$ वाँ मूल या

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ अर्थात $a$ के $n$ वें मूल का $m$ वाँ घात ।

## प्रश्नसंग्रह 3.2

1. निम्नलिखित सारिणी पूर्ण कीजिए ।

| क्र. | संख्या | कौन-से मूल का कौन-सा घात | कौन-से घात का कितना मूल |
|---|---|---|---|
| (1) | $(225)^{\frac{3}{2}}$ | 225 के वर्गमूल का घन | 225 के घन का वर्गमूल |
| (2) | $(45)^{\frac{4}{5}}$ | | |
| (3) | $(81)^{\frac{6}{7}}$ | | |
| (4) | $(100)^{\frac{4}{10}}$ | | |
| (5) | $(21)^{\frac{3}{7}}$ | | |

2. परिमेय घातांक स्वरुप में व्यक्त करो ।

(1) 121 के पाँचवें घात का वर्गमूल

(2) 324 के चौथे मूल का घन

(3) 264 के वर्ग का पाँचवाँ मूल

(4) 3 के घनमूल का घन



### थोड़ा याद करें

- $4 \times 4 = 16$ अर्थात् $4^2 = 16$, इसी प्रकार $(-4) \times (-4)$ अर्थात $(-4)^2 = 16$ इसप्रकार 16 इस संख्या में एक धन और दूसरे में ऋण ऐसे दो वर्गमूल हैं । संकेत में 16 के धन वर्गमूल को $\sqrt{16}$ ऐसे, तथा 16 के ऋण वर्गमूल को $-\sqrt{16}$ ऐसा दर्शाया जाता है $\sqrt{16} = 4$ और $-\sqrt{16} = -4$.
- प्रत्येक धन संख्या के दो वर्गमूल होते हैं ।
- शून्य इस संख्या का वर्गमूल शून्य होता है ।

### आओ जानें

## घन तथा घनमूल (Cube and Cube Root)

किसी एक संख्या को तीन बार लेकर गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल उस संख्या का घन होता है ।

उदाहरण, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ । अर्थात 216 यह संख्या 6 का घन है ।

परिमेय संख्या का घन करना ।

**उदा. (1)** 17 का घन कीजिए ।

$17^3 = 17 \times 17 \times 17$

$= 4913$

**उदा. (2)** (–6) का घन कीजिए ।

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

$= -216$

**उदा. (3)** $\left(-\frac{2}{5}\right)$ का घन कीजिए ।

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{8}{125}$

**उदा. (4)** (1.2) का घन कीजिए ।

$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$

$= 1.728$

**उदा. (5)** (0.02) का घन कीजिए ।

$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$

$= 0.000008$

### दिमाग चलाएँ

उदा (1) में 17 यह संख्या धन है इस संख्या का घन 4913 भी धन संख्या है ।

उदा (2) में –6 इस संख्या का घन –216 है और कुछ धन तथा ऋण संख्या लेकर उनका घन करके देखो उससे संख्या का चिह्न और उस संख्या का घन का चिह्न इनमे कौन–सा संबंध प्राप्त होता है, अध्ययन कीजिए ।

उदा (4) तथा (5) में दी गई संख्या में दशमलव चिह्न के पश्चात आने वाले अंकों की संख्या और संख्याओं के घन में दशमलव चिह्न के पश्चात आने वाले अंकों की संख्या में कौन–सा संबंध ध्यान में आता है ।

**घनमूल ज्ञात करना :**

दी गई संख्या का अभाज्य गुणनखंड पद्धति से वर्गमूल ज्ञात करना हमने देखा है । उसी पद्धति से हम घनमूल ज्ञात करेंगे ।

**उदा. (1)** 216 का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

**हल :** सर्वप्रथम 216 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे । $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 तथा 2 यह गुणनखंड 3 बार आता है इसलिए एक–एक बार लेकर समूह बनाइए ।

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \qquad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ अर्थात $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

**उदा. (2)** $-1331$ का घनमूल ज्ञात कीजिए।

**हल :** $-1331$ का घनमूल ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम 1331 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करेंगे

$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$
$= (-11^3)$

$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$

**उदा.(4)** $\sqrt[3]{0.125}$ ज्ञात कीजिए।

**हल :** $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$

$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} = a$

$= \frac{5}{10} \quad = 0.5$

**उदा.(3)** 1728 के घनमूल ज्ञात कीजिए।

**हल :** $1728 = 8 \times 216 \quad = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 \quad = (2 \times 6)^3 \; \ldots\ldots\ldots \; a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (ध्यान दे, $-1728$ का घनमूल $-12$ प्राप्त होता है।)

## प्रश्नसंग्रह 3.3

**1.** निम्न संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए।

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) $-512$ (5) $-2744$ (6) 32768

**2.** हल कीजिए (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

**3.** यदि $\sqrt[3]{729} = 9$ हो तब $\sqrt[3]{0.000729} =$ कितना ?

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 3.1** (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

**2.** (1) 81 का चौथा मूल (2) 49 का वर्गमूल (3) 15 का पाँचवाँ मूल
(4) 512 का नौवाँ मूल (5) 100 का उन्नीसवाँ मूल (6) 6 का सातवाँ मूल

**प्रश्नसंग्रह 3.2** **1.** (2) 45 के पाँचवें मूल का चौथा घात, 45 के चौथे घात का पाँचवाँ मूल
(3) 81 के 7 वें मूल का 6 वां घात, 81 के 6 वें घात का 7 वाँ मूल
(4) 100 के 10 वें मूल का चौथा घात, 100 के चौथे घात का 10 वाँ मूल
(5) 21 के 7 वें मूल का 3 रा घात, 21 के 3 रे घात का 7 वाँ मूल

**2.** (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

**प्रश्नसंग्रह 3.3** **1.** (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) $-8$ (5) $-14$ (6) 32

**2.** (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ **3.** 0.09

CN8DQH

# 4 त्रिभुज के शीर्षलंब तथा माध्यिका

### थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक संगामी तथा त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक संगामी होते हैं, इसका अध्ययन किया है । हमने यह भी अध्ययन किया है कि उनके संगम बिंदु को क्रमश: अंत:केंद्र अथवा परिकेंद्र कहते हैं ।

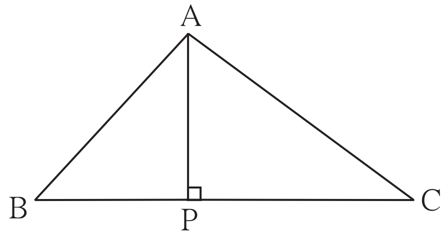
**कृति :**

एक रेखा खींचें । उस रेखा के बाहर एक बिंदु लें । गुणिया की सहायता से उस बिंदु से रेखा पर लंब खींचें ।

### आओ जानें

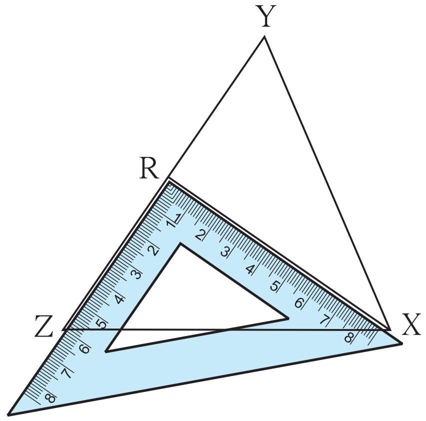
## शीर्षलंब (Altitude)

त्रिभुज के शीर्षबिंदु से उसकी सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब रेखाखंड को उस त्रिभुज का शीर्षलंब कहते हैं । $\Delta$ ABC में आधार रेख AP पर BC शीर्षलंब है ।




**त्रिभुज का शीर्षलंब खींचना :**

1. कोई $\Delta$ XYZ त्रिभुज खींचें ।
2. गुणिये की सहायता से शीर्षबिंदु X से आधार YZ पर लंब खींचें । वह YZ को जिस बिंदु पर प्रतिच्छेदित करता है उस बिंदु को R नाम दें । रेख XR यह आधार YZ पर शीर्षलंब है ।

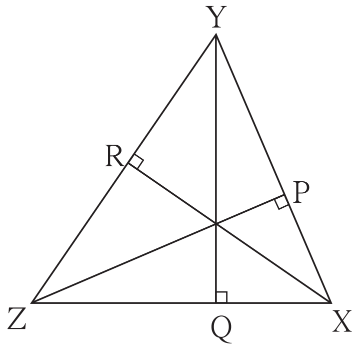



3. आधार रेख XZ को ध्यान में लें । उसके सम्मुख शीर्षबिंदु Y से रेख XZ पर शीर्षलंब खींचें । रेख YQ $\perp$ रेख XZ ।
4. आधार रेख XY को ध्यान में लें । उसके सम्मुख शीर्षबिंदु Z से रेख XY पर लंब खींचें । रेख ZP $\perp$ रेख XY ।

   रेख XR, रेख YQ, रेख ZP यह $\Delta$ XYZ के शीर्षलंब है ।

   यह तीनों शीर्षलंब संगामी है । इसे ध्यान में रखें ।

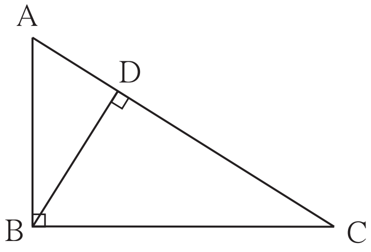
   **इन संगमन बिंदु को त्रिभुज का लंबकेंद्र कहते हैं । उसे 'O' अक्षर द्वारा दर्शाते हैं ।**



**त्रिभुज के लंब केंद्र बिंदु का स्थान :**

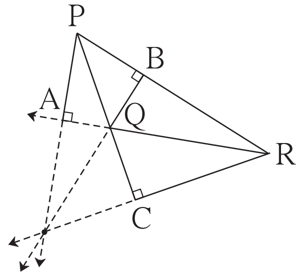
**कृति I :**

कोई भी एक समकोण त्रिभुज खींचकर उसके सभी शीर्षलंब खींचें । वे कौन-से बिंदु पर प्रतिच्छेदित करते हैं, उसे लिखिए ।



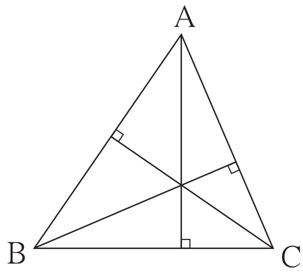

**कृति II :**

कोई भी एक अधिक कोण त्रिभुज खींचकर उसके तीनों शीर्षलंब खींचें । क्या वे परस्पर प्रतिच्छेदित करते हैं ? इन शीर्षलंबों को समाविष्ट करने वाली रेखाएँ खींचे । वे त्रिभुज के बाह्य भाग से एक ही बिंदु से जाती है । इसका अनुभव कीजिए ।




**कृति III :**

न्यूनकोण $\Delta$ ABC खींचकर उसके सभी शीर्षलंब खींचे । लंबकेंद्र का स्थान कहाँ है, देखें ।




**मैंने यह समझा**

त्रिभुज के शीर्षलंब एक ही बिंदु से जाते हैं । अर्थात ये शीर्षलंब संगामी (Concurrent) होते है । उनके संगम बिंदु को लंब केंद्र बिंदु (Orthocentre) कहते हैं । उसे 'O' अक्षर द्‍वारा दर्शाते है ।

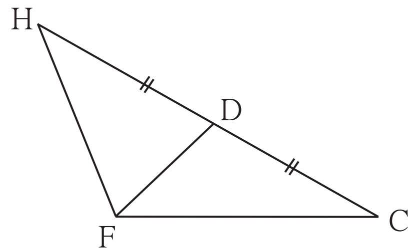
- समकोण त्रिभुज का लंब केंद्र बिंदु, समकोण बनाने वाले शीर्षबिंदु पर होता है ।
- अधिक कोण त्रिभुज का लंब केंद्र बिंदु, त्रिभुज के बाह्य भाग में होता है ।
- न्यूनकोण त्रिभुज का लंब केंद्र बिंदु, त्रिभुज के अंत: भाग में होता है ।

**आओ जानें**

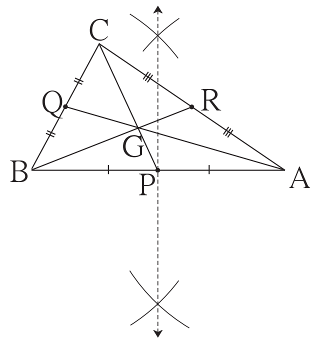
**माध्यिका (Median)**

त्रिभुज का शीर्षबिंदु और सम्मुख भुजा के मध्यबिंदु को जोड़ने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका कहते हैं ।

$\Delta$ HCF में रेख FD यह आधार HC की माध्यिका है ।



**त्रिभुज की माध्यिका खींचना :**




1. Δ ABC खींचें ।
2. भुजा AB का मध्यबिंदु प्राप्तकर उसे P नाम दें । रेखा CP खींचें ।
3. भुजा BC का मध्यबिंदु प्राप्तकर उसे Q नाम दें । रेखा AQ खींचें ।
4. भुजा AC का मध्यबिंदु प्राप्तकर उसे R नाम दें । रेखा BR खींचें ।

   रेखा PC, रेखा QA, रेखा BR यह Δ ABC की माध्यिकाएँ है ।

वे संगामी है इसे ध्यान में रखो । इनके संगमन बिंदु को माध्यिका संगामी (केंद्रव) कहते हैं । उसे G अक्षर से दर्शाया जाता है ।

**कृति IV :** एक समकोण, एक अधिक कोण तथा एक न्यूनकोण त्रिभुज खींचकर उसकी माध्यिकाएँ खींचे । वे माध्यिकाएँ संगामी हैं, इसका अनुभव कीजिए ।

**त्रिभुज के माध्यिका संगामी बिंदु का गुणधर्म :**

- कोई एक बड़ा त्रिभुज ABC खींचे ।
- Δ ABC की रेख AR, रेख BQ तथा रेख CP माध्यिका खींचे । संगामी बिंदु को G नाम दें ।

आकृति में रेखाखंडों की लंबाई नापकर सारणी के रिक्त चौखटें भरें ।

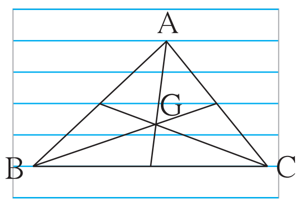
| | | |
|---|---|---|
| $l$(AG) = ☐ | $l$(GR) = ☐ | $l$(AG) : (GR) = ☐ |
| $l$(BG) = ☐ | $l$(GQ) = ☐ | $l$(BG) : (GQ) = ☐ |
| $l$(CG) = ☐ | $l$(GP) = ☐ | $l$(CG) : (GP) = ☐ |

यह सभी अनुपात लगभग 2:1 है इसका अनुभव कीजिए ।

**मैंने यह समझा**

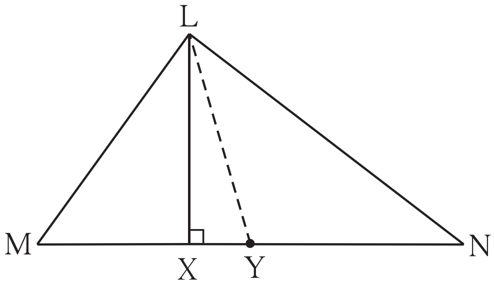
त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती है । उसके संगमन बिंदु को माध्यिका संगामी (केंद्रव) (Centroid) कहते हैं । उसे G अक्षर द्‌वारा दर्शाया जाता है । किसी भी त्रिभुज में G का स्थान त्रिभुज के अंत:भाग में होता है । संगमन बिंदु से प्रत्येक माध्यिका 2:1 अनुपात में विभाजित होती है ।

**आओ चर्चा करें**



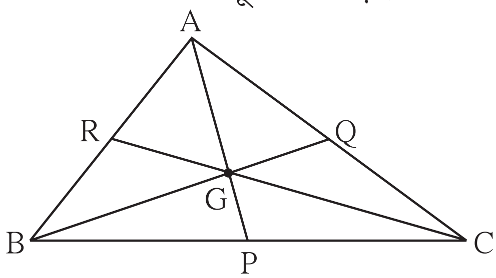

किसी विद्‌यार्थी ने लेखन पुस्तिका के कागज पर पांच समांतर रेखाओं की सहायता से Δ ABC खींचकर G यह माध्यिका संगामी (केंद्रव) बिंदु स्थापित किया । तो उसके द्‌वारा निश्चित किया गया G का स्थान सही है क्या ? कैसे निश्चित करेंगे ?

## प्रश्नसंग्रह 4.1

1. 


$\Delta$ LMN में ...... यह शीर्षलंब है तथा ...... यह माध्यिका है । (रिक्त स्थानों में योग्य रेखाखंड का नाम लिखें ।)

2. न्यूनकोण $\Delta$ PQR खींचकर उसके तीनों शीर्षलंब खींचें । संगमन बिंदु को ‘O’ नाम दें ।
3. अधिककोण $\Delta$ STV खींचकर उसके सभी शीर्षलंब खींचें । उसकी माध्यिका संगामी (केंद्रव) दर्शाऐं ।
4. अधिककोण $\Delta$ LMN खींचकर उसके सभी शीर्षलंब खींचें । संगमन बिंदु को O से दर्शाऐं ।
5. समकोण $\Delta$ XYZ खींचकर उसकी माध्यिका खींचें । उसके संगमन बिंदु को G से दर्शाऐं ।
6. कोई एक समद्विबाहु त्रिभुज खींचकर उसके सभी माध्यिका और शीर्षलंब खींचें । उसके संगमन बिंदु के बारे में अपने निरिक्षण को दर्ज करें ।
7. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।




$\Delta$ ABC में बिंदु G यह माध्यिका संगमन बिंदु है ।

(1) यदि $l$(RG) = 2.5 तो $l$(GC) = ......

(2) यदि $l$(BG) = 6 तो $l$(BQ) = ......

(3) यदि $l$(AP) = 6 तो $l$(AG) = ..... तथा $l$(GP) = .....

### इसे करके देखिए

**(I) :** किसी एक समबाहु त्रिभुज की रचना कर उसके परिकेंद्र (C), अंत:वृत्त केंद्र (I), माध्यिका संगामी (केंद्रव) बिंदु (G) तथा लंबकेंद्र बिंदु (O) खींचें । निरीक्षण करें ।

**(II):** किसी एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कर केंद्रव बिंदु, लंबकेंद्र बिंदु, परिकेंद्र, अंत:वृत्त केंद्र यह एक रेखीय है । इसकी जाँच कीजिए ।

४४४

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 4.1**

1. रेखा LX और रेखा LY

7. (1) 5, (2) 9, (3) 4, 2

CNH9SA

# 5 विस्तार सूत्र

## थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने कुछ विस्तार सूत्रों का अध्ययन किया था ।

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,  (ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

उपरोक्त विस्तार सूत्रों का उपयोग करके निम्न चौखटों में उचित पद लिखिए ।

(i) $(x + 2y)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

(ii) $(2x - 5y)^2 = \square - 20xy + \square$

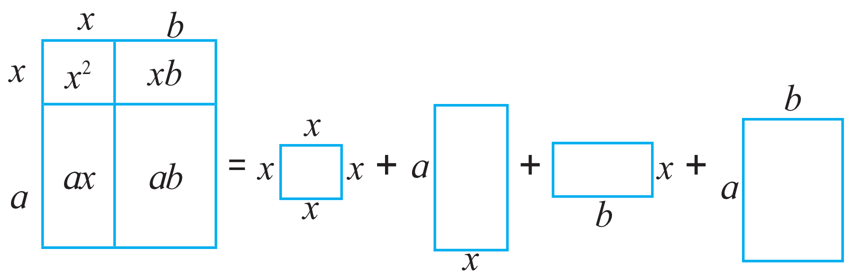
(iii) $(101)^2 = (100 + 1)^2 = \square + \square + 1^2 = \square$

(iv) $(98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \square + \square = \square$

(v) $(5m + 3n)(5m - 3n) = \square - \square = \square - \square$

## आओ जानें

**कृति :** आयत तथा वर्ग के क्षेत्रफल की सहायता से $(x + a)(x + b)$ का विस्तार कीजिए ।




$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

### (I) $(x + a)(x + b)$ का विस्तार (Expansion of $(x + a)(x + b)$)

$(x + a)$ तथा $(x + b)$ जिनका एक पद समान है ऐसे द्विपद हैं । ऐसे द्विपदों का गुणा कीजिए ।

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore \boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

**विस्तार कीजिए।**

**उदा. (1)** $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) \quad = x^2 + 5x + 6$

**उदा. (2)** $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) \quad = y^2 + y - 12$

**उदा. (3)** $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$

$= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

**उदा. (4)** $\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \quad = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

**उदा. (5)** $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) \quad = x^2 - 10x + 21$

## प्रश्नसंग्रह 5.1

1. विस्तार कीजिए।

(1) $(a+2)(a-1)$ (2) $(m-4)(m+6)$ (3) $(p+8)(p-3)$

(4) $(13+x)(13-x)$ (5) $(3x+4y)(3x+5y)$ (6) $(9x-5t)(9x+3t)$

(7) $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{y}+4\right)\left(\frac{1}{y}-9\right)$



### आओ जानें

## (II) $(a + b)^3$ का विस्तार (Expansion of $(a + b)^3$)

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore \boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

इस विस्तार सूत्र का उपयोग करके हल किए गए कुछ उदाहरणों का अध्ययन करेंगे,

**उदा. (1)** $(x + 3)^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ यहाँ $a = x$ तथा $b = 3$ है।

$$\therefore\ (x+3)^3 = (x)^3 + 3\times x^2\times 3 + 3\times x\times(3)^2 + (3)^3$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

**उदा. (2)** $(3x+4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$
$$= 27x^3 + 3\times 9x^2\times 4y + 3\times 3x\times 16y^2 + 64y^3$$
$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64\,y^3$$

**उदा. (3)** $\left(\frac{2m}{n}+\frac{n}{2m}\right)^3 = \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$
$$= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$$
$$= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

**उदा. (4)** $(41)^3 = (40+1)^3 = (40)^3 + 3\times(40)^2\times 1 + 3\times 40\times(1)^2 + (1)^3$
$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$$

## प्रश्नसंग्रह 5.2

1. विस्तार कीजिए ।

(1) $(k+4)^3$ (2) $(7x+8y)^3$ (3) $(7+m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

**कृति :** अपनी सुविधा से $a$ तथा $b$ भुजाएँ लेकर अलग-अलग दो समघन बनाइए । लंबाई एवं चौड़ाई $a$ तथा ऊँचाई $b$ वाले ऐसे 3 आयताकार लंब बेलन, इसी प्रकार लंबाई एवं चौड़ाई $b$ तथा ऊँचाई $a$ वाले 3 आयताकार लंब बेलन बनाइए । इस घनाकृति की उचित रचना कर $(a+b)$ भुजावाला समघन (घनाभ) बनाइए ।

### आओ जानें

## (III) $(a-b)^3$ का विस्तार (Expansion of $(a-b)^3$)

$$(a-b)^3 = (a-b)\,(a-b)\,(a-b) = (a-b)(a-b)^2$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\therefore \quad \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

**उदा. (1)** विस्तार कीजिए $(x - 2)^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ यहाँ, $a = x$ तथा $b = 2$ लेकर,

$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

**उदा. (2)** $(4p - 5q)^3$ का विस्तार कीजिए ।

$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$

$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$

**उदा. (3)** विस्तार सूत्र का उपयोग कर हल कीजिए $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$

**उदा. (4)** सरल रुप दीजिए ।

(i) $(p + q)^3 + (p - q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$

$= 2p^3 + 6pq^2$

(ii) $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$

$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$

$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$

$= 72x^2y + 54y^3$



**मैंने यह समझा**

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

## प्रश्नसंग्रह 5.3

**1.** विस्तार कीजिए ।

(1) $(2m - 5)^3$ (2) $(4 - p)^3$ (3) $(7x - 9y)^3$ (4) $(58)^3$

(5) $(198)^3$ (6) $\left(2p-\frac{1}{2p}\right)^3$ (7) $\left(1-\frac{1}{a}\right)^3$ (8) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^3$

**2.** सरल रुप दीजिए ।

(1) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$ (2) $(3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3$

(3) $(4a - 3)^3 - (4a + 3)^3$ (4) $(5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3$



**आओ जानें**

### (IV) $(a + b + c)^2$ का विस्तार (Expansion of $(a + b + c)^2$)

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c) \times (a + b + c)$$
$$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$\therefore$ $\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$ यह सूत्र प्राप्त होता है ।

**उदा. (1)** विस्तार कीजिए $(p + q + 3)^2$

$= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3$

$= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p \quad = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9$

**उदा. (2)** वर्ग विस्तार के सोपान की चौखट में उचित पद लिखिए ।

$(2p + 3m + 4n)^2$

$= (2p)^2 + (3m)^2 + \square + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \square \times 4n + 2 \times 2p \times \square$

$= \square + 9m^2 + \square + 12pm + \square + \square$

**उदा. (3)** सरल रुप दीजिए $(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$

$= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln$

$= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln$

## प्रश्नसंग्रह 5.4

1. विस्तार कीजिए (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$

   (3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

2. सरल कीजिए (1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$

   (2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 5.1** (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$

(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$

(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

**प्रश्नसंग्रह 5.2** (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$

(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301

(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$

(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

**प्रश्नसंग्रह 5.3** 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$

(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 + 729y^3$ (4) 1,95,112

(5) 7762392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$

(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$

(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

**प्रश्नसंग्रह 5.4** 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$

(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$

(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$

(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$

(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

CNR5TX

# 6 बैजिक राशियों के गुणनखंड

## थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने $ax + ay$ और $a^2 - b^2$ इस स्वरुप वाली बैजिक राशियों के गुणनखंड का अध्ययन किया है ।

उदाहरण (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

## आओ जानें

### वर्ग त्रिपद के गुणनखंड (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ स्वरुप वाले बैजिक राशि को वर्ग त्रिपद कहते हैं ।

हम यह जानते है कि $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore$ $x^2 + (a + b)x + ab$ के $(x + a)$ तथा $(x + b)$ गुणनखंड हैं ।

$x^2 + 5x + 6$ के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए इसकी तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ से करने पर, $a + b = 5$ और $ab = 6$ अत: 6 के ऐसे गुणखंड ज्ञात करो जिनका योग 5 हो तथा त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ इस रुप में लिखकर उसके गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ .......... $x^2 + (a + b)x + ab$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$ ....... $(3 + 2)$ को $x$ से गुणा कर प्राप्त गुणनफल के चार पदों के दो समूह बनाकर गुणनखंड प्राप्त कीजिए

$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$

दिए गए वर्ग त्रिपदी के गुणनखंड ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

**उदा. (1)** $2x^2 - 9x + 9$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

**हल :** वर्ग पद का गुणांक तथा स्थिर पद का गुणा करने पर गुणनफल $2 \times 9 = 18$ है ।

अब 18 के ऐसे गुणनखंड ज्ञात करेंगे जिनका योगफल मध्य पद के गुणांक के बराबर अर्थात $-9$ होगा ।

$18 = (-6) \times (-3)$ और $(-6) + (-3) = -9$

$-9x$ इस पद को $-6x - 3x$ ऐसे लिखेंगे

$(x - 3)$ सामान्य पद ज्ञात करेंगे ।

+18

−6 −3

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x(x - 3) - 3(x - 3)$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore$ $2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

**उदा. (2)** $2x^2 + 5x - 18$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $2x^2 + 5x - 18$ (−36 → +9, −4)

$= \underline{2x^2 + 9x} \; \underline{-4x - 18}$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

**उदा. (3)** $x^2 - 10x + 21$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $x^2 - 10x + 21$ (+21 → −7, −3)

$= \underline{x^2 - 7x} - \underline{3x + 21}$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

**उदा. (4)** $2y^2 - 4y - 30$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ ........ सभी पदों में से सामान्य गुणनखंड 2 प्राप्त करेंगे ।

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ ........ (−15 → −5, +3)

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

## प्रश्नसंग्रह 6.1

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

| | | |
|---|---|---|
| (1) $x^2 + 9x + 18$ | (2) $x^2 - 10x + 9$ | (3) $y^2 + 24y + 144$ |
| (4) $5y^2 + 5y - 10$ | (5) $p^2 - 2p - 35$ | (6) $p^2 - 7p - 44$ |
| (7) $m^2 - 23m + 120$ | (8) $m^2 - 25m + 100$ | (9) $3x^2 + 14x + 15$ |
| (10) $2x^2 + x - 45$ | (11) $20x^2 - 26x + 8$ | (12) $44x^2 - x - 3$ |

**आओ जानें**

## $a^3 + b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 + b^3$)

हम जानते है कि, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

दाहिने पक्ष में $3ab$ सामान्य लेकर विस्तार सूत्र की रचना निम्नलिखित प्रकार से कर सकते हैं ।

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

अब, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$.......... पक्ष बदलने पर

$\therefore\ a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore\ \boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

दो घनों के योग के गुणनखंडों का उपरोक्त सूत्रों का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल करेंगे ।

**उदा. (1)** $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$$

**उदा. (2)** $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

**उदा. (3)** $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

**उदा. (4)** $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

## प्रश्नसंग्रह 6.2

1. गुणनखंड ज्ञात कीजिए : (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$
   (5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

### आओ जानें

### $a^3 - b^3$ के गुणनखंड (Factors of $a^3 - b^3$)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

अब, $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$$

$$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \quad \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

दो घनों के अंतर का गुणनखंड ज्ञात करने के सूत्र का उपयोग कर दिए गए उदाहरण हल कीजिए ।

**उदा. (1)** $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

**उदा. (2)** $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

**उदा. (3)** $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

**उदा. (4)** $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

**उदा. (5)** सरल रुप दीजिए : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

**हल :** $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

**उदा. (6)** सरल रुप दीजिए : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

**हल :** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ इस सूत्र के आधार पर

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$

$= 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

**मैंने यह समझा**

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

## प्रश्नसंग्रह 6.3

**1.** गुणनखंड ज्ञात कीजिए (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

**2.** सरल रुप दीजिए (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

## आओ जानें

### परिमेय बैजिक व्यंजक (Rational algebraic expressions)

A और B दो बैजिक व्यंजक हों तो $\frac{A}{B}$ इस व्यंजक को परिमेय बैजिक व्यंजक कहते हैं। परिमेय बैजिक व्यंजक को सरल रुप देते समय गणितीय संक्रियाएँ जोड़, घटाना, गुणा, भाग आदि परिमेय संख्याओं पर संक्रियाओं की तरह होती है। बैजिक राशियों का भाग करते समय हर या भाजक शून्य नहीं हो सकता, इसे ध्यान में रखें।

**उदा. (1)** सरल रुप दीजिए $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

**हल :** $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

$=\frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)}\times\frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$

$=\frac{1}{a-2}$

**उदा. (2)** $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

**हल :** $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

$=\frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)}\times\frac{2(7x-4)}{(x+2)}$

$= 2$

**उदा. (3)** सरल रुप दीजिए $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

**हल :** $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}=\frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

## प्रश्नसंग्रह 6.4

1. सरल रुप दीजिए।

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}\times\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7}\times\frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)}\times\frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12}\div\frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3}\div\frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$

## उत्तर सूची

### प्रश्नसंग्रह 6.1

**1.** (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$
(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$
(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$
(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

### प्रश्नसंग्रह 6.2

**1.** (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$
(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$
(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$
(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1-\frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

### प्रश्नसंग्रह 6.3

**1.** (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + y^2)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$
(5) $\left(2p-\frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$
(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a-\frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

**2.** (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$
(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

### प्रश्नसंग्रह 6.4

**1.** (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$
(4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
(6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

CP11VK

# 7 विचरण

## थोड़ा याद करें

एक दर्जन कॉपियों का मूल्य 240 रुपये हो तो 3 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 9 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 24 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? 50 कॉपियों का मूल्य कितना होगा ? इसे ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

| कॉपियों की संख्या ($x$) | 12 | 3 | 9 | 24 | 50 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| मूल्य (रुपये) ($y$) | 240 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | 20 |

उपर्युक्त सारणी के आधार पर कह सकते हैं कि प्रत्येक जोड़ी में कॉपियों की संख्या ($x$) और उसके मूल्य ($y$) का अनुपात $\frac{1}{20}$ है । यह स्थिर है । कॉपियों की संख्या तथा उनका मूल्य समान अनुपात में हैं । ऐसे उदाहरण में दो में से एक संख्या के बढ़ने पर दूसरी संख्या उसी अनुपात में बढ़ती है ।

## आओ जानें

### प्रत्यक्ष विचरण (Direct variation)

$x$ और $y$ समानुपात में है इस कथन को हम $x$ और $y$ में प्रत्यक्ष विचरण है या $x$ और $y$ के बीच प्रत्यक्ष विचरण है, इस प्रकार लिख सकते हैं । इसी प्रकार इस कथन को गणितीय भाषा में चिह्न का उपयोग करके $x \propto y$ ऐसे लिख सकते हैं । [$\alpha$(अल्फा) यह विचरण के लिए प्रयोग किया जाने वाला ग्रीक अक्षर है ।]

$x \propto y$ को समीकरण के रूप में $x = \mathrm{k}y$ लिखते हैं । यहाँ k स्थिर पद है ।

$x = \mathrm{k}y$ या $\frac{x}{y} = \mathrm{k}$ यह विचरण के समीकरण हैं । k विचरण का स्थिरांक है ।

निम्नलिखित कथनों को विचरण का चिह्न लगाकर कैसे लिखे गए है ? देखिए ।

(i) वृत्त का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या के वर्ग के प्रत्यक्ष समानुपात में होता है ।

वृत्त का क्षेत्रफल = A, त्रिज्या = $r$ लेकर उपर्युक्त कथन $A \propto r^2$ लिखा जाता है ।

(ii) द्रव का दाब ($p$) उस द्रव की गहराई ($d$) के प्रत्यक्ष विचरण में है, इस कथन को $p \propto d$ के रुप में लिखते हैं ।

प्रत्यक्ष विचरण के चिह्नांकित विन्यास की सभी संकल्पनाएँ समझने के लिए दिए गए उदाहरणों का अध्ययन कीजिए ।

**उदा. (1)** $x$, $y$ के प्रत्यक्ष विचरण में है, $x = 5$ हो तो $y = 30$, तो विचरण का अचरांक ज्ञात करें तथा विचरण का समीकरण लिखें ।

**हल :** $x$, $y$ के प्रत्यक्ष विचरण में है, अर्थात $x \propto y$

$\therefore$ $x = ky$ ......... k विचरण का अचरांक है । जब $x = 5$ तब $y = 30$ दिया गया है ।

$\therefore$ $5 = k \times 30$     $\therefore$ $k = \frac{1}{6}$ विचरण का अचरांक

$\therefore$ इस अधार पर $x = ky$ अर्थात $x = \frac{y}{6}$ या $y = 6x$ प्राप्त होता है ।

**उदा. (2)** मूँगफली की कीमत तथा उसके वजन में प्रत्यक्ष विचरण है । 5 किग्रा मूँगफली की कीमत ₹ 450 हो, तो 1 क्विंटल मूँगफली की कीमत ज्ञात कीजिए । (1 क्विंटल = 100 किग्रा)

**हल :** माना मूँगफली की कीमत $x$ तथा मूँगफली का वजन $y$ है ।

$x$ तथा $y$ में प्रत्यक्ष विचरण है यह दिया गया है । अर्थात $x \propto y$ या $x = ky$

परंतु $x = 450$ रु होने पर $y = 5$ होता है यह दिया गया है, इस आधार पर k ज्ञात करेंगे ।

$\therefore$ $x = ky$     $\therefore$ $450 = 5k$     $\therefore$ $k = 90$ (विचरण का अचरांक)

अब, $y = 100$ हो

तो $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 क्विंटल मूँगफली की कीमत 9000 रुपये होगा ।

## प्रश्नसंग्रह 7.1

1. विचरण के चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

(1) वृत्त की परिधि ($c$) उसकी त्रिज्या ($r$) के समानुपात में होती है ।

(2) कार में भरा हुआ पेट्रोल ($l$) तथा उसके द्वारा तय की गई दूरी ($d$) प्रत्यक्ष विचरण में होती हैं ।

2. सेब का मूल्य तथा सेबों की संख्या में प्रत्यक्ष विचरण है । इस आधार पर निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

| सेबों की संख्या ($x$) | 1 | 4 | . . . | 12 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|
| सेब का मूल्य ($y$) | 8 | 32 | 56 | . . . | 160 |

3. यदि $m \propto n$ और $m = 154$ हो तो $n = 7$ तो $n = 14$ होने पर $m$ का मान ज्ञात कीजिए ।

4. $n$, $m$ के प्रत्यक्ष विचरण में हो, तो दी गई सारणी पूर्ण कीजिए ।

| $m$ | 3 | 5 | 6.5 | . . . | 1.25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 12 | 20 | . . . | 28 | . . . |

5. $y$, $x$ से वर्गमूल के प्रत्यक्ष विचरण में बदलता है । जब $x = 16$ तब $y = 24$ तो विचरण का अचरांक ज्ञात कीजिए तथा विचरण का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

6. सोयाबीन की फसल निकालने के लिए 4 मजदूरों को ₹ 1000 मजदूरी देनी पड़ती है । यदि मजदूरी और मजदूरों की संख्या में प्रत्यक्ष विचरण हो तो 17 मजदूरों को कितनी मजदूरी देनी पड़ेगी ?

**थोड़ा याद करें**

व्यायाम के लिए विद्यार्थियों की कतार बनाई गई । प्रत्येक कतार में विद्यार्थियों की संख्या तथा कतारों की संख्या निम्न प्रकार से है ।

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| कतार में छात्रों की संख्या | 40 | 10 | 24 | 12 | 8 |
| कतार की संख्या | 6 | 24 | 6 | 20 | 30 |

उपर्युक्त सारणी के आधार पर ऐसा दिखता है कि प्रत्येक जोड़ी में कतार में विद्यार्थियों की संख्या तथा कुल कतारों की संख्या का गुणनफल 240 है । अर्थात यह गुणनफल स्थिर है । प्रत्येक कतार के विद्यार्थियों की संख्या और कतारों की संख्या में प्रतिलोम विचरण है ।

जब दो संख्याओं में से एक संख्या बढ़ी तो दूसरी संख्या उसी अनुपात में कम होती हो तब वे दोनों संख्याएँ प्रतिलोम विचरण में होती हैं । उदाहरणार्थ एक संख्या दुगुनी हो गई तो दूसरी संख्या आधी हो जाती है ।

**आओ जानें**

## प्रतिलोम विचरण (Inverse Variation)

संख्या $x$ और $y$ प्रतिलोम अनुपात में है यही कथन $x$ और $y$ प्रतिलोम विचरण में है ऐसा लिखते हैं । $x$ और $y$ प्रतिलोम विचरण में हो तो $x \times y$ स्थिर पद होता है । उसे k मानकर उदाहरण हल करना आसान होता है ।

$x$ और $y$ में प्रतिलोम विचरण है इसे $x \propto \frac{1}{y}$ ऐसा दर्शाते है ।

$x \propto \frac{1}{y}$ अर्थात $x = \frac{k}{y}$ या $x \times y = k$ यह विचरण का समीकरण है । k विचरण का अचरांक है ।

**हल किए गए उदाहरण**

**उदा. (1)** यदि $a$, $b$ से प्रतिलोम विचरण में हो तो निम्नलिखित सारणी पूर्ण कीजिए ।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 6 | 12 | 15 | . . . |
| $b$ | 20 | . . . | . . . | 4 |
| $a \times b$ | 120 | 120 | . . . | . . . |

**हल :** (i) $a \propto \frac{1}{b}$ अर्थात $a \times b = k$

(i) $a = 6$ तब $b = 20$

$\therefore$ k $= 6 \times 20 = 120$ (विचरण का अचरांक)

(ii) $a = 12$ तब $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 12 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 10$

(iii) $a = 15$ तब $b = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore 15 \times b = 120$

$\therefore \quad b = 8$

(iv) $b = 4$ तब $a = ?$

$a \times b = 120$

$\therefore a \times 4 = 120$

$\therefore \quad a = 30$

**उदा. (2)** $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ तब $f = 18$

तो (i) $d = 10$ हो तो $f$ का मान ज्ञात कीजिए। (ii) $f = 50$ हो तो $d$ ज्ञात कीजिए।

**हल :** $f \propto \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ तब $f = 18$ इस आधार पर k ज्ञात कीजिए।

$18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (विचरण का स्थिरांक)

(i) $d = 10$ तो $f = ?$

$f \times d^2 = 450$

$\therefore f \times 10^2 = 450$

$\therefore f \times 100 = 450$

$\therefore \quad f = 4.5$

(ii) $f = 50$, $d = ?$

$f \times d^2 = 450$

$50 \times d^2 = 450$

$d^2 = 9$

$d = 3$ या $d = -3$

## प्रश्नसंग्रह 7.2

1. किसी कार्य को पूरा करने के लिए लगाए गए मजदूरों की संख्या और कार्य पूरा होने में लगने वाले दिनों की जानकारी निम्नलिखित सारणी में दी गई है, यह सारणी पूर्ण कीजिए।

| मजदूरों की संख्या | 30 | 20 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| दिन | 6 | 9 | 12 | | 36 |

2. प्रत्येक उदाहरण में विचरण के अचरांक ज्ञात कीजिए तथा विचरण के समीकरण लिखिए।

(1) $p \propto \frac{1}{q}$ ; $p = 15$ तब $q = 4$ $\qquad$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$ ; जब $z = 2.5$ तब $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$ ; जब $s = 4$ तब $t = 5$ $\qquad$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ ; जब $x = 15$ तब $y = 9$

3. सेबों के ढेर से सभी सेब पेटी में भरे जाते हैं। प्रत्येक पेटी में 24 सेब रखें तो उसे भरने के लिए 27 पेटियाँ लगती हैं। यदि प्रत्येक पेटी में 36 सेब रखें तो उसे भरने के लिए कितनी पेटियाँ लगेंगी ?

4. नीचे दिए गए कथन के विचरण का चिह्न का उपयोग करके लिखिए ।

(1) ध्वनि के तरंगदैर्ध्य की लंबाई ($l$) और बारंबारता ($f$) में प्रतिलोम विचरण है ।

(2) दीये के प्रकाश की तीव्रता (I) और दीये तथा परदे के बीच दूरी ($d$) के वर्ग में प्रतिलोम विचरण होता है ।

5. $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ और $x = 40$ हो तो $y = 16$ होता है । यदि $x = 10$ हो तो $y$ कितना होगा ?

6. $x$ और $y$ राशियो में प्रतिलोम विचरण है । $x = 15$ तब $y = 10$ होता है, $x = 20$ हो तो $y =$ कितना ?

## आओ जानें

### समय, कार्य, वेग (Time, Work, Speed)

किसी निर्माण कार्य को पूरा करने के लिए निर्धारित मजदूरों की संख्या तथा उन्हें कार्य करने में लगने वाले समय से सबंधित उदाहरण प्रतिलोम विचरण के होते हैं । इसी प्रकार प्रतिलोम विचरण के कुछ उदाहरण वाहनों की गति तथा उनके द्वारा निर्धारित दूरी तय करने में लगने वाले समय से संबधित होते हैं । ऐसे उदाहरणों को समय-कार्य-वेग से संबंधित उदाहरण कहते हैं ।

**उदा. (1)** किसी खेत में मूँगफली निकालने का कार्य 15 महिलाएँ 8 दिन में पूरा करती हैं । वही कार्य 6 दिन में पूरा करना हो तो कितनी महिलाओं को कार्य पर लगना होगा ?

**हल :** कार्य को पूरा होने में लगने वाले दिन और कार्य करने वाली महिलाओं की संख्या में प्रतिलोम विचरण हैं ।

माना, दिनों की संख्या $d$ और महिलाओं की संख्या $n$ है ।

$d \propto \frac{1}{n}$ $\quad \therefore d \times n = k$ $\quad$ (k अचरांक है)

जब $n = 15$, तब $d = 8$ $\quad \therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (विचरण का स्थिरांक)

अब $d = 6$ हो तो $n$ कितना यह ज्ञात करेंगे ।

$\therefore d \times n = 120$ $\quad \therefore 6 \times n = 120,$ $\quad \therefore n = 20$

$\therefore$ कार्य को 6 दिन में पूरा करने के लिए 20 महिलाओं को कार्य पर लगाना होगा ।

**उदा. (2)** किसी वाहन की औसत गति 48 किमी/ घंटा होने पर कुछ दूरी तय करने के लिए उसे 6 घंटे लगते हैं, तो गति 72 किमी / घंटा होने पर उतनी ही दूरी तय करने के लिए कितना समय लगेगा ?

**हल :** माना, वाहन की गति s तथा लगने वाला समय $t$ गति तथा समय में प्रतिलोम विचरण है ।

$s \propto \frac{1}{t}$ $\quad \therefore s \times t = k$ $\quad$ (k अचरांक है)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (विचरण का स्थिरांक)

अब $s = 72$ हो तो $t$ ज्ञात करेंगे ।

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$

$\therefore t = \frac{288}{72} = 4$ घंटे

चाल 72 किमी / घंटा होने पर उतनी ही दूरी जाने के लिए 4 घंटे लगेंगे ।

## प्रश्नसंग्रह 7.3

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन प्रतिलोम विचरण के हैं ?

   (1) मजदूरों की संख्या तथा उनके द्‍वारा कार्य पूर्ण करने के लिए लगने वाला समय ।

   (2) पानी की टंकी भरने के लिए आवश्यक एक जैसे नलों की संख्या तथा पानी की टंकी भरने में लगने वाला समय ।

   (3) वाहन में भरे हुए पेट्रोल तथा उसका मूल्य ।

   (4) वृत्त के क्षेत्रफल तथा उस वृत्त की त्रिज्या ।

2. यदि 15 मजदूरों द्‍वारा एक दीवार बनाने के लिए 48 घंटे लगते है तो 30 घंटे में वही कार्य पूरा करने के लिए कितने मजदूर लगेंगे ?

3. थैली में दूध भरने वाले यंत्र से यदि 3 मिनट में आधे लीटर के 120 थैलियाँ भरी जाती हो तो 1800 थैलियाँ भरने के लिए कितना समय लगेगा ?

4. किसी कार की औसत गति 60 किमी/ घंटा होने पर उसे कुछ दूरी तय करने में 8 घंटे लगते हैं । यदि वही दूरी साढ़े सात घंटे में तय करना हो तो उस कार की औसत गति ज्ञात कीजिए ?

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 7.1** **1.** (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ **2.** $x$ क्रमश: 7 तथा 20, $y = 96$ **3.** 308
**4.** $m = 7$, $n$ क्रमश: 26 तथा 5 **5.** $k = 6$ , $y = 6\sqrt{x}$ **6.** ₹ 4250

**प्रश्नसंग्रह 7.2** **1.** मजदूरों की संख्या क्रमश: 15 तथा 5, दिन = 18 **2.** (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$
**3.** 18 पेटियाँ **4.** (1) $l \propto \frac{1}{f}$ (2) $I \propto \frac{1}{d^2}$ **5.** $y = 256$ **6.** $y = 7.5$

**प्रश्नसंग्रह 7.3** **1.** प्रतिलोम विचरण (1), (2) **2.** 24 मजदूर **3.** 45 मिनट
**4.** 4 किमी/घंटा

# 8 चतुर्भुज की रचना तथा चतुर्भुजों के प्रकार

### थोड़ा याद करें

- दिए गए मापों के आधार पर त्रिभुजों की रचना कीजिए ।

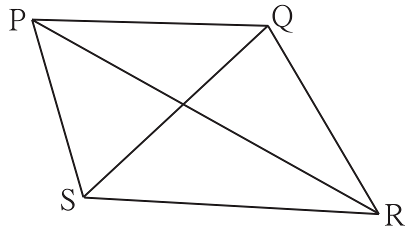
(1) $\Delta$ ABC : $l$ (AB) = 5 सेमी, $l$ (BC) = 5.5 सेमी, $l$ (AC) = 6 सेमी

(2) $\Delta$ DEF : $m\angle$ D= 35°, $m\angle$ F = 100°, $l$ (DF) = 4.8 सेमी

(3) $\Delta$ MNP : $l$ (MP) = 6.2 सेमी, $l$ (NP) = 4.5 सेमी, $m\angle$ P = 75°

(4) $\Delta$ XYZ : $m\angle$ Y = 90°, $l$ (XY) = 4.2 सेमी, $l$ (XZ) = 7 सेमी

- किसी भी चतुर्भुज के चार कोण, चार भुजाएँ तथा दो विकर्ण ऐसे कुल दस घटक होते हैं ।



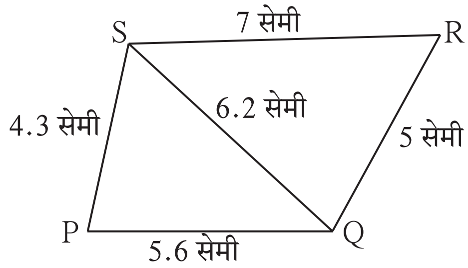

### आओ जानें

## चतुर्भुज की रचना (Construction of a quadrilateral)

चतुर्भुज के दस घटकों में से विशिष्ठ पाँच घटकों के माप ज्ञात हो तो चतुर्भुज की रचना की जा सकती है । चतुर्भुज की रचना भी त्रिभुज की रचना के आधार पर ही होती है, इसे उदाहरण से समझ लीजिए ।

**(I) चतुर्भुज की चार भुजाएँ तथा एक विकर्ण दिया गया हो तो चतुर्भुज की रचना करना ।**

**उदा.** $\square$ PQRS की रचना करो जिसमें, $l$(PQ) = 5.6 सेमी , $l$(QR) = 5 सेमी, $l$ (PS) = 4.3 सेमी, $l$ (RS)= 7 सेमी, $l$ (QS)= 6.2 सेमी ।

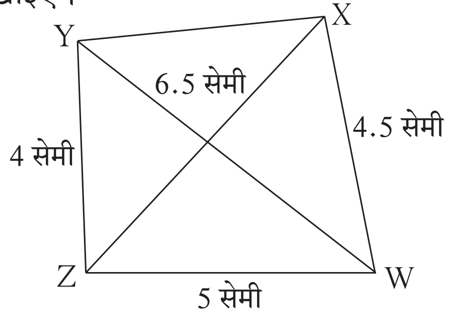



**हल :** प्रथम कच्ची आकृति बनाओ । आकृति में दिए गए घटकों को दर्शाओ । आकृति के आधार पर सहज ध्यान में आता है कि $\Delta$ SPQ तथा $\Delta$ SRQ के सभी भुजाओं की लंबाइयाँ हमें ज्ञात है । इस आधार पर $\Delta$ SPQ तथा $\Delta$ SRQ की रचना करने पर दिए गए मापोंवाला $\square$ PQRS प्राप्त होता है । इस चतुर्भुज की रचना आप स्वयं कीजिए ।

**(II) चतुर्भुज की तीन भुजाएँ तथा दो विकर्ण दिए गए हों तो चतुर्भुज की रचना करना ।**

**उदा.** □ WXYZ ऐसा बनाओ कि, $l$ (YZ) = 4 सेमी, $l$ (ZX) = 6 सेमी, $l$ (WX) = 4.5 सेमी, $l$ (ZW) = 5 सेमी, $l$ (YW) = 6.5 सेमी,

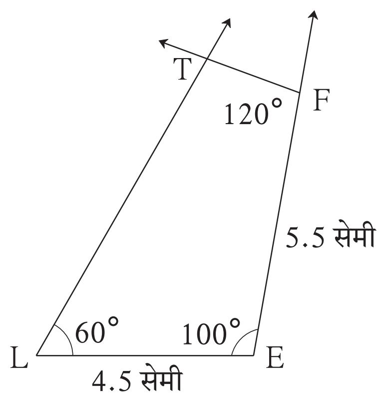
**हल :** कच्ची आकृति बनाइए । दी गई जानकारी आकृति में दिखाइए । आकृति से ध्यान में आता है की Δ WXZ तथा Δ WZY के सभी भुजाओं की लंबाईयाँ हमें प्राप्त हो गई है । उस आधार पर Δ WXZ तथा Δ WZY की रचना करेंगे । इसके बाद रेख XY खींचने पर दिए गए मापोंवाला □ WXYZ प्राप्त होता है । तुम इस चतुर्भुज की रचना कीजिए ।




**(III) चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएँ तथा कोई तीन कोण दिए गए हों तो चतुर्भुज की रचना करना ।**

**उदा.** □ LEFT की रचना कीजिए जिसमे, $l$ (EL)=4.5 सेमी, $l$ (EF)=5.5 सेमी, $m\angle L = 60°$, $m\angle E = 100°$, $m\angle F = 120°$

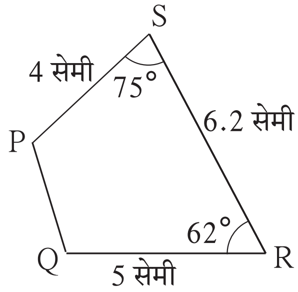
**उकल :** कच्ची आकृति बनाकर उसमें दी गई जानकारी दिखाइए । आकृति से ध्यान में आता है कि 4.5 सेमी लंबाई वाली रेखा LE खींचकर उसके बिंदु E पर 100° माप का कोण बनाने वाली रेखा EF खींचने पर चतुर्भुज के L, E तथा F ऐसे तीन बिंदु प्राप्त होते हैं । बिंदु L पर 60° माप का कोण बनानेवाला तथा F पर 120° माप का कोण बनाने वाली किरण खीचेंगे । उन किरणों का प्रतिच्छेदन बिंदु T होगा । आप इस प्रकार चतुर्भुज की रचना कीजिए ।




**(IV) चतुर्भुज की तीन भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दिए गए हों तो चतुर्भुज की रचना करना ।**

**उदा.** □ PQRS ऐसा बनाइए कि, $l$ (QR)=5 सेमी, $l$ (RS)=6.2 सेमी, $l$ (SP)= 4 सेमी, $m\angle R = 62°$, $m\angle S = 75°$

**हल :** चतुर्भुज की कच्ची आकृति बनाकर उस आकृति में दी गई जानकारी दर्शाइए । आकृति से ध्यान में आता है कि दी गई लंबाईवाली रेखा QR खींचकर उसके बिंदु R पर 62° माप का कोण बनाने वाली रेखा RS खींचने पर



चतुर्भुज के बिंदु Q, R तथा S प्राप्त होते हैं । रेखा RS के बिंदु S पर $75^\circ$ माप का कोण बनाने वाली रेखा SP खींचने पर बिंदु P यह 4 सेमी की दूरी पर प्राप्त होगा । रेखा PQ खींचने पर दिए गए माप वाला $\square$ PQRS प्राप्त होगा । आप इस चतुर्भुज की रचना अब कर पाओगे ।

## प्रश्नसंग्रह 8.1

**1. चतुर्भुजों की रचना कीजिए ।**

(1) $\square$ MORE में $l(MO) = 5.8$ सेमी, $l(OR) = 4.4$ सेमी, $m\angle M = 58^\circ$, $m\angle O = 105^\circ$, $m\angle R = 90^\circ$।

(2) $\square$ DEFG ऐसा खींचिए कि $l(DE) = 4.5$ सेमी, $l(EF) = 6.5$ सेमी, $l(DG) = 5.5$ सेमी, $l(DF) = 7.2$ सेमी, $l(EG) = 7.8$ सेमी ।

(3) $\square$ ABCD में $l(AB) = 6.4$ सेमी, $l(BC) = 4.8$ सेमी, $m\angle A = 70^\circ$, $m\angle B = 50^\circ$, $m\angle C = 140^\circ$ ।

(4) $\square$ LMNO खींचिए जिसमें $l(LM) = l(LO) = 6$ सेमी, $l(ON) = l(NM) = 4.5$ सेमी, $l(OM) = 7.5$ सेमी ।

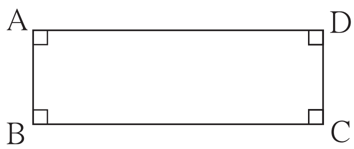
### थोड़ा याद करें

चतुर्भुज की आकृति में भुजाओं तथा कोणों पर विविध शर्तें रखने पर चतुर्भुज के विविध प्रकार प्राप्त होते हैं । चतुर्भुज के आयत तथा वर्ग इन प्रकारों से आप अवगत हो । चतुर्भुज के इन प्रकारों तथा अन्य प्रकारों का अध्ययन हम कृति द्‍वारा करेंगे ।

## समकोण चतुर्भुज अथवा आयत (Rectangle)

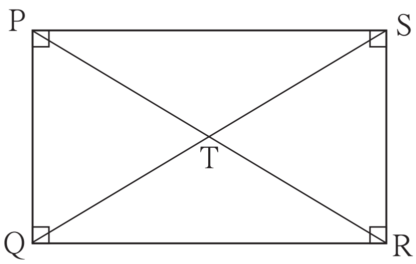
**जिस चतुर्भुज के चारों कोण समकोण होते हैं उस चतुर्भुज को समकोण चतुर्भुज अथवा आयत कहते हैं ।**

चतुर्भुज की रचना करने के लिए दिए गए पाँच घटकों में, दो संलग्न भुजाएँ आवश्यक है । दो संलग्न भुजाएँ तथा तीन कोण ज्ञात हो तो आप चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं ।




परिभाषा के अनुसार आयत के सभी कोण समकोण होते हैं । अत: आयत की दो संलग्न भुजाएँ ज्ञात हों तो आप आयत की रचना कर सकते हैं ।

**कृति I :** आप अपनी सुविधा से संलग्न भुजाएँ लेकर किसी आयत PQRS की रचना कीजिए । उसके विकर्णों के प्रतिच्छेदन बिंदु को T नाम दो । दुभाजक तथा पटरी की सहायता से




(1) भुजा QR तथा भुजा PS इन सम्मुख भुजाओं की लंबाई का मापन कीजिए ।
(2) भुजा PQ तथा भुजा SR की लंबाई का मापन कीजिए ।
(3) विकर्ण PR तथा विकर्ण QS की लंबाई का मापन कीजिए ।
(4) विकर्ण PR के रेख PT तथा रेख TR इन भागों की लंबाइयों का मापन कीजिए ।
(5) रेख QT और रेख TS इन विकर्ण QS के भागों की लंबाइयों का मापन कीजिए ।

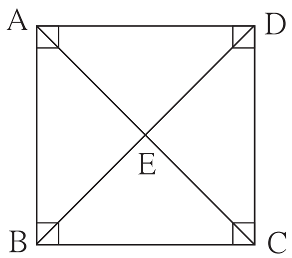
प्राप्त मापों का निरीक्षण करें कक्षा के अन्य विद्यार्थियों द्वारा मापे गए माप परस्पर एक दूसरे को दिखाकर चर्चा कीजिए ।

- आयत की सम्मुख भुजाएँ परस्पर सर्वांगसम होती हैं ।
- आयत के विकर्ण सर्वांगसम होते हैं ।
- आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।

## वर्ग (Square)

**जिस चतुर्भुज की सभी भुजाएँ सर्वांगसम होती है तथा सभी कोण समकोण होते हैं, उस चतुर्भुज को वर्ग कहते हैं ।**

**कृति II :** अपनी सुविधा से भुजा की लंबाई लेकर वर्ग ABCD की रचना कीजिए । उसके विकर्णों के प्रतिच्छेदन बिंदु को E नाम दो । भूमितीय पेटी के साधनों का उपयोग कर




(1) विकर्ण AC तथा विकर्ण BD की लंबाइयों का मापन कीजिए ।
(2) बिंदु E द्वारा निर्मित दोनों विकर्णों के दोनों भागों की लंबाईयों का मापन कीजिए ।
(3) बिंदु E पर निर्मित सभी कोणों का मापन कीजिए ।
(4) वर्ग के प्रत्येक कोण के, विकर्ण द्वारा निर्मित भागों का मापन कीजिए (उदा., $\angle$ ADB और $\angle$CDB) ।

अपने तथा आपकी कक्षा के मित्रों को प्राप्त निरीक्षणों की चर्चा कीजिए ।

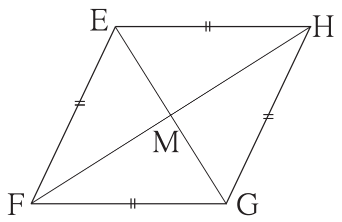
आपको वर्ग के निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होंगे ।

- विकर्णों की लंबाइयां समान है अर्थात वे सर्वांगसम हैं ।
- विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।
- विकर्ण परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।
- विकर्ण, वर्ग के सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते हैं ।

## समचतुर्भुज (Rhombus)

**जिस चतुर्भुज की सभी भुजाएँ समान लंबाईवाली (सर्वांगसम) होती हैं, उस चतुर्भुज को समचतुर्भुज कहते हैं।**

**कृति III :** अपनी सुविधा से भुजा की लंबाई लेकर तथा एक कोण का अपनी सुविधा से माप लेकर समचतुर्भुज EFGH खींचो । उसके विकर्ण खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिंदु को M नाम दीजिए ।




(1) चतुर्भुज के सम्मुख कोण तथा बिंदु M पर बननेवाले कोणों का मापन कीजिए ।

(2) चतुर्भुज के प्रत्येक कोणों के, विकर्ण द्वारा बनने वाले दोनो भागों का मापन कीजिए ।

(3) दोनों विकर्णों की लंबाई का मापन करो । बिंदु M द्वारा निर्मित विकर्णो के भागों की लंबाई का मापन कीजिए ।

सभी मापनों द्वारा समचतुर्भुज के निम्नलिखित गुणधर्म अपने ध्यान में आएँगे ।

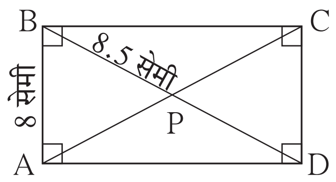
- सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- समचतुर्भुज के विकर्ण सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करते है ।
- विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं, साथ ही परस्पर समकोण बनाते हैं ।

कक्षा के अन्य विद्यार्थियों को भी उपरोक्त गुणधर्म ध्यान में आए होंगे ऐसा दिखाई देगा ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** आयत ABCD के विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिंदु P है । (i) $l$(AB) = 8 सेमी तो $l$(DC) = कितना ?, (ii) $l$(BP) = 8.5 सेमी तो $l$(BD) तथा $l$(BC) कितना ?

**हल :** एक कच्ची आकृति बनाकर दी गई जानकारी दर्शाइए ।




(i) आयत की सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

$\therefore\ l(DC) = l(AB) = 8$ सेमी

(ii) आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।

$\therefore\ l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17$ सेमी

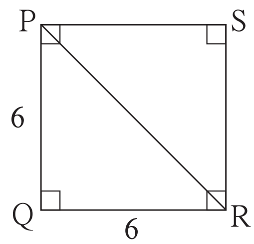
$\Delta$ BCD समकोण त्रिभुज है । पाइथागोरस के प्रमेयानुसार,

$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore\ l(BC) = \sqrt{225} = 15$ सेमी

**उदा. (2)** 6 सेमी भुजा वाले वर्ग के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना आकृति में दर्शाए अनुसार $\square$ PQRS, 6 सेमी भुजा वाला वर्ग है । रेख PR विकर्ण है ।



$\Delta$ PQR में पाइथागोरस के प्रमेय द्वारा, $l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

$= (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72$

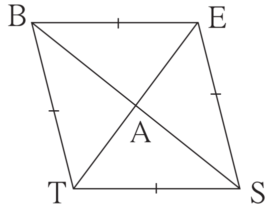
$\therefore\ l(PR) = \sqrt{72}$ , $\therefore$ विकर्ण की लंबाई $\sqrt{72}$ सेमी है ।

**उदा (3)** $\square$ BEST इस समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बिंदु A पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

(i) यदि $m\angle BTS = 110°$, तो $m\angle TBS$ ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि $l(TE) = 24$, $l(BS) = 70$, तो $l(TS)$ = कितना ?

**हल :** $\square$ BEST की कच्ची आकृति बनाकर विकर्ण के प्रतिच्छेदन बिंदु को A द्वारा दर्शाए ।




(i) समचतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।

$\therefore\ m\angle BES = m\angle BTS = 110°$

अब, $m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore 110° + 110° + m\angle TBE + m\angle TSE = 360°$

$\therefore\ m\angle TBE + m\angle TSE = 360° - 220° = 140°$

$\therefore\ 2\ m\angle TBE = 140°$...... $\because$ समचतुर्भुज के सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।

$\therefore\ m\angle TBE = 70°$

$\therefore\ m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70° = 35°$ ... $\because$ समचतुर्भुज का विकर्ण सम्मुख कोणों को समद्विभाजित करता है ।

(ii) समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं ।

$\therefore\ \Delta$ TAS में, $m\angle TAS = 90°$

$l(TA) = \frac{1}{2}\ l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12$, $l(AS) = \frac{1}{2}\ l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

पाइथागोरस के प्रमेय द्वारा,

$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore\ l(TS) = \sqrt{1369} = 37$

## प्रश्नसंग्रह 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ सेमी तथा $l(BC) = 4.5$ सेमी हो ऐसे आयत ABCD की रचना कीजिए ।

2. भुजा 5.2 सेमी वाले वर्ग WXYZ की रचना कीजिए ।

3. भुजा 4 सेमी तथा $m\angle K = 75°$ हो ऐसे समचतुर्भुज $\square$ KLMN की रचना कीजिए ।

4. किसी आयत का विकर्ण 26 सेमी हो तथा एक भुजा 24 सेमी हो तो उस आयत की दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए ।

5. समचतुर्भुज □ABCD के विकर्णों की लंबाइयाँ 16 सेमी तथा 12 सेमी हो, तो उस समचतुर्भुज की भुजा तथा परिमिति ज्ञात कीजिए ।

6. भुजा 8 सेमी हो ऐसे वर्ग के विकर्ण की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

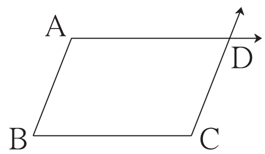
7. किसी समचतुर्भुज के एक कोण का माप $50^\circ$ हो तो उनके अन्य कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

## समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

चतुर्भुज के इस प्रकार को उसके नाम के आधार पर परिभाषित कर सकते हैं ।

**जिस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ परस्पर समांतर होती है, उस चतुर्भुज को समांतर चतुर्भुज कहते हैं ।**

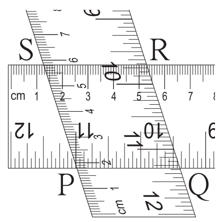
समांतर चतुर्भुज की रचना कैसे की जा सकती है ?




साथ की आकृति में दर्शाएनुसार रेख AB तथा रेख BC परस्पर कोई भी माप का कोण बनाने वाले रेखाखंड खींचिए ।

आपने ' रेखा के बाह्य बिंदु से उस रेखा को समांतर रेखा की रचना करना' यह रचना की है । बिंदु C से जाने वाली, रेख AB को समांतर रेखा खींचिए । वैसे ही बिंदु A से जाने वाली तथा रेख BC को समांतर रेखा खींचिए । उनके प्रतिच्छेदन बिंदु को D नाम दीजिए । □ABCD एक समांतर चतुर्भुज है । ध्यान दीजिए की समांतर रेखाओं की तिर्यक रेखा द्‌वारा बने अत: कोण परस्पर संपूरक होते हैं । अत: उपरोक्त आकृति में $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$, $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$, $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ अर्थात समांतर चतुर्भुज के कोणों का गुणधर्म निम्नानुसार है । • समांतर चतुर्भुज के संलग्न कोणों की जोड़ियाँ संपूरक होती हैं ।

इस प्रकार चतुर्भुज के और भी कुछ गुणधर्म जानने के लिए □ PQRS कोई भी समांतर चतुर्भुज की रचना आगे दी गई कृति करके कीजिए । कम-अधिक चौड़ाई वाली दो मापन पट्‌टियाँ लो इनमें से एक पट्‌टी कागज पर रखकर उसकी दोनो कोरों से रेखा खींचिए। दूसरी पट्‌टी उन रेखाओं पर तिरछी रखकर उसकी दोनों कोरों से रेखा खींचिए । ऐसा करके समांतर चतुर्भुज प्राप्त होगा । विकर्ण खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिंदु को T नाम दीजिए ।




(1) चतुर्भुज के सम्मुख कोणों को मापकर लिखिए । (2) सम्मुख भुजाओं के जोड़ियों की लंबाई माप कर लिखिए । (3) विकर्णों की लंबाइयाँ माप कर लिखिए । (4) बिंदु T द्‌वारा बनने वाले विकर्णों के प्रत्येक भागों की लंबाई माप कर लिखिए।

मापन द्‌वारा आपको समांतर चतुर्भुज के निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होंगे ।

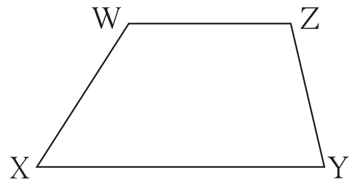
- सम्मुख कोणों के माप समान होते हैं, अर्थात सम्मुख कोण सर्वांगसम होते हैं ।
- सम्मुख भुजाओं की लंबाई समान, अर्थात सम्मुख भुजाएँ सर्वांगसम होती हैं ।
- विकर्ण एक दूसरे को समद्‌विभाजित करते हैं ।

विविध समांतर चतुर्भुजों की रचना करके उपरोक्त गुणधर्मों की जाँच कीजिए ।

## समलंब चतुर्भुज (Trapezium)

**जिस चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर होती है उस चतुर्भुज को समलंब चतुर्भुज कहते हैं।**

आकृति □ WXYZ में, रेख WZ तथा रेख XY सम्मुख भुजाओं की जोड़ी समांतर है । परिभाषा के अनुसार, □ WXYZ एक समलंब चतुर्भुज है ।



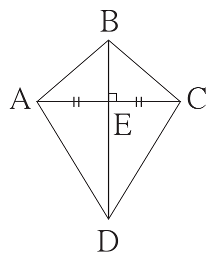

समांतर रेखाओं के तिर्यक रेखा द्वारा निर्मित अत: कोणों के गुणधर्म के अनुसार,

$m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ आणि $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

इस आधार पर समलंब चतुर्भुज के संलग्न कोणों की चार में से दो जोड़ियाँ संपूरक होती हैं ।

## पतंग (Kite)

आकृति में □ ABCD देखो । इस चतुर्भुज का विकर्ण BD, विकर्ण AC का लंब समद्विभाजक है ।




**जिस चतुर्भुज का एक विकर्ण दूसरे विकर्ण का लंब समद्विभाजक होता है, ऐसे चतुर्भुज को पतंग कहते हैं ।**

आकृति में रेख AB ≅ रेख CB तथा रेख AD ≅ रेख CD, दुभाजक द्वारा जाँच कीजिए । उसी प्रकार, ∠BAD तथा ∠BCD का मापन कर वे सर्वांगसम हैं इसकी जाँच कीजिए ।

अर्थात पतंग इस चतुर्भुज के प्रकार में दो गुणधर्म होते हैं ।

- संलग्न भुजाओं की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम होती हैं ।
- सम्मुख कोणों की एक जोड़ी सर्वांगसम होती है ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** समांतर चतुर्भुज के संलग्न कोणों के माप $(5x - 7)^\circ$ तथा $(4x + 25)^\circ$ तो उन कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

**हल :** समांतर चतुर्भुज के संलग्न कोण संपूरक होते हैं ।

$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180$

$\therefore 9x + 18 = 180$

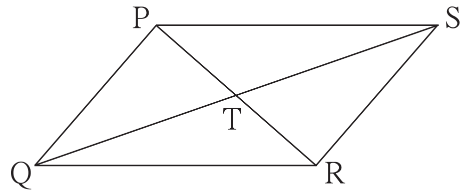
$\therefore 9x = 180 - 18 = 162$

$\therefore x = 18$

$\therefore$ एक कोण का माप $= (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$

दूसरे कोण का माप $= (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$

**उदा.(2)** संलग्न आकृति में □ PQRS एक समांतर चतुर्भुज है । उसके विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिंदु T है । आकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।




(i) यदि $l$(PS) = 5.4 सेमी, तो $l$(QR) = कितना ?

(ii) यदि $l$(TS) = 3.5 सेमी, तो $l$(QS) = कितना ?

(iii) $m\angle QRS = 118^\circ$, तो $m\angle QPS$ = कितना ?

(iv) $m\angle SRP = 72^\circ$ तो $m\angle RPQ$ = कितना ?

**हल :** समांतर चतुर्भुज PQRS में,

(i) $l(QR) = l(PS) = 5.4$ सेमी ......... सम्मुख भुजा सर्वांगसम

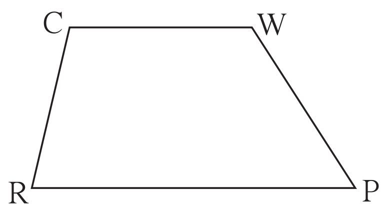
(ii) $l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 3.5 = 7$ सेमी ...... विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।

(iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118^\circ$ .......... सम्मुख कोण सर्वांगसम

(iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72^\circ$ ........... एकांतर कोण सर्वांगसम

**उदा . (3)** □ CWPR के क्रमिक कोणों के मापों का अनुपात क्रमशः 7:9:3:5 है । तो उस चतुर्भुज के कोणों के माप ज्ञात कीजिए तथा चतुर्भुज का प्रकार पहचानिए ।

**हल :** माना, $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7:9:3:5$




माना $\angle C$, $\angle W$, $\angle P$ तथा $\angle R$ के माप क्रमशः $7x, 9x, 3x, 5x$ हैं ।

$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360^\circ$

$\therefore 24x = 360^\circ \quad \therefore x = 15$

$\therefore \ m\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ, m\angle W = 9 \times 15 = 135^\circ$

$m\angle P = 3 \times 15 = 45^\circ$ तथा $m\angle R = 5 \times 15 = 75^\circ$

$\therefore m\angle C + m\angle R = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$ $\quad\therefore$ भुजा CW || भुजा RP

$m\angle C + m\angle W = 105^\circ + 135^\circ = 240^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ भुजा CR तथा भुजा WP समांतर नहीं हैं ।

$\therefore$ □ CWPR के सम्मुख भुजाओं की एक ही जोड़ी समांतर है ।

$\therefore$ □ CWPR एक समलंब चतुर्भुज है ।

## प्रश्नसंग्रह 8.3

1. किसी समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के माप $(3x - 2)^\circ$ तथा $(50 - x)^\circ$ हो तो चतुर्भुज के प्रत्येक कोणों के माप ज्ञात कीजिए ।

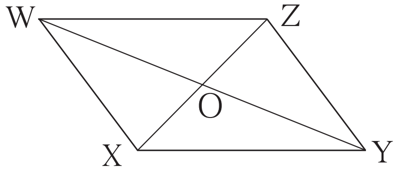
2. समांतर चतुर्भुज की संलग्न आकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।

(1) यदि $l$(WZ) = 4.5 सेमी तो $l$(XY) = ?

(2) यदि $l$(YZ) = 8.2 सेमी हो तो $l$(XW) = ?

(3) यदि $l$(OX) = 2.5 सेमी हो तो $l$(OZ) = ?

(4) यदि $l$(WO) = 3.3 सेमी हो तो $l$(WY) = ?




(5) यदि $m\angle$ WZY = 120° तो $m\angle$ WXY = ? तथा $m\angle$ XWZ = ?

3. □ ABCD समांतर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $l$(BC) = 7 सेमी, ∠ABC = 40°, $l$(AB) = 3 सेमी ।

4. किसी चतुर्भुज के क्रमिक कोणों का अनुपात 1:2:3:4 हो तो वह किस प्रकार का चतुर्भुज होगा ? उस चतुर्भुज के प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए । कारण लिखिए ।

5. □ BARC ऐसा बनाइए कि $l$(BA) = $l$(BC) = 4.2 सेमी, $l$(AC) = 6.0 सेमी, $l$(AR) = $l$(CR) = 5.6 सेमी ।

6*. □ PQRS की रचना कीजिए जिसमें $l$(PQ) = 3.5 सेमी, $l$(QR) = 5.6 सेमी, $l$(RS) = 3.5 सेमी, $m\angle$ Q = 110°, $m\angle$ R = 70° ।

यदि □ PQRS समांतर चतुर्भुज हो तो उपरोक्त जानकारी में से कौन-सी जानकारी देना आवश्यक नहीं है लिखिए ।

## उत्तर सूची

### प्रश्नसंग्रह 8.2

4. 10 सेमी  5. भुजा 10 सेमी तथा परिमिति 40 सेमी  6. $\sqrt{128}$ सेमी  7. 130°, 50°, 130°

### प्रश्नसंग्रह 8.3

1. 37°, 143°, 37°, 143°

2. (1) 4.5 सेमी  (2) 8.2 सेमी  (3) 2.5 सेमी  (4) 6.6 सेमी  (5) 120°, 60°

4. 36°, 72°, 108°, 144°, समलंब चतुर्भुज

CPISYV

# 9 छूट और कमीशन

## थोड़ा याद करें

निम्नलिखित रिक्त चौखटों में उचित संख्या लिखिए ।

1. $\frac{12}{100}$ = प्रतिशत $\square$ = $\square$ %

2. प्रतिशत 47 = $\frac{\square}{\square}$

3. 86% = $\frac{\square}{\square}$

4. 300 का 4 प्रतिशत = $300 \times \frac{\square}{\square} = \square$

5. 1700 का 15% = $1700 \times \frac{\square}{\square} = \square$

## आओ चर्चा करें




इस प्रकार का विज्ञापन आपने देखा होगा । सेल में अनेक वस्तुओं पर छूट या रिबेट दी जाती है । हमने परिसर में सामान्यत: जुलाई के महीने में विशेष रुप से कपड़ों के सेल शुरु होते हैं । उसके कारणों को खोजकर चर्चा कीजिए ।

## आओ जानें

### छूट (Discount)

श्री. सुरेश द्वारा जून और जुलाई महीने में की गई साड़ियों की बिक्री तथा लाभ का विवरण सारणी में देखिए ।

| महिना | साड़ी का अंकित मूल्य (रुपये) | साड़ी का विक्रय मूल्य (रुपये) | एक साड़ी पर लाभ (रुपयो में) | बिक्री की गई साड़ियों की संख्या | कुल लाभ (रुपयो में) |
|---|---|---|---|---|---|
| जून | 200 | 250 | 50 | 40 | $50 \times 40 = 2000$ |
| जुलाई (सेल) | 200 | 230 | 30 | 100 | $30 \times 100 = 3000$ |

सारणी के अनुसार आपके ध्यान में आएगा की जुलाई महीने में साड़ियों का सेल घोषित करने पर प्रत्येक साड़ी पर छूट दी गई है । इसके कारण एक साड़ी पर लाभ जून महीने की तुलना में कम हुआ फिर भी जुलाई महीने में साड़ियों की अधिक बिक्री होने के कारण कुल लाभ में बढ़ोतरी हुई है ।

बिक्री के लिए रखी गई वस्तुओं पर उस वस्तु का मूल्य अंकित होता है उसे उस वस्तु का अंकित मूल्य (Marked Price) कहते हैं । दुकानदार अंकित मूल्य पर छूट देता है ।

वस्तु बेचते समय दुकानदार अंकित मूल्य से कम राशि लेता हो तो उस राशि को '**छूट**' कहते हैं । छूट देने के पश्चात शेष मूल्य विक्रय मूल्य होता है अर्थात विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य − छूट

छूट सामान्यत: प्रतिशत में दी जाती है ।

'20 प्रतिशत छूट' का अर्थ वस्तु के अंकित मूल्य का 20% कम राशि लेकर वस्तु की बिक्री करना ।

अर्थात वस्तु का अंकित मूल्य 100 रुपये हो तो उसपर 20 रुपये की छूट देने पर उसका विक्रय मूल्य = 100 − 20 = 80 रुपये होगा ।

ऐसे व्यवहार में छूट $x$ % हो तो $\frac{x}{100} = \frac{\text{वस्तु के अंकित मूल्य पर छूट}}{\text{अंकित मूल्य}}$ ऐसा संबंध होता है ।

$\therefore$ वस्तु के अंकित मूल्य पर छूट $= \frac{\text{अंकित मूल्य} \times x}{100}$

**अधिक जानकारी हेतु :**

आजकल दुकान में जाकर खरीदने की अपेक्षा, पुस्तक, कपड़े, मोबाइल आदि अनेक वस्तुओं को ऑनलाइन खरीदा जाता है । जो कंपनी ऑनलाइन वस्तुओं की बिक्री करती है उन्हें दुकान की रख-रखाव, सजावट तथा उसका व्यवस्थापन का खर्च नहीं होता । अत: ऑनलाइन खरीदी पर भी छूट देता है और वस्तु घर पर ही प्राप्त हो जाती है ।

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** किसी पुस्तक का अंकित मूल्य 360 रु है । दुकानदार ने वह पुस्तक 306 में बेची तो उसने कितने प्रतिशत छूट दी ?

**हल :** अंकित मूल्य = ₹ 360, विक्रय मूल्य = ₹ 306. $\therefore$ छूट = 360 − 306 = ₹ 54.

वस्तु का अंकित मूल्य 360 रुपया, तो छूट 54 रुपया ।

$\therefore$ माना वस्तु का अंकित मूल्य 100 रुपया तो छूट $x$ रुपया $\frac{\text{छूट}}{\text{अंकित मूल्य}} = \frac{x}{100}$

$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100}$ $\qquad \therefore \quad x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$

$\therefore$ पुस्तक के अंकित मूल्य पर 15 प्रतिशत छूट दी ।

**उदा. (2)** कुर्सी का अंकित मूल्य 1200 रुपये हो तथा उसपर 10% छूट हो तो कुल कितनी छूट होगी ? कुर्सी का विक्रय मूल्य कितना होगा ?

**हल :**

**विधि I**

अंकित मूल्य = 1200 रुपये, छूट = 10%

$\frac{\text{छूट}}{\text{अंकित मूल्य}}$ यह अनुपात ज्ञात करेंगे ।

माना कुर्सी के मूल्य पर $x$ रुपये छूट मिलती है ।

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$

$x = \frac{10}{100} \times 1200$

$x = 120$

कुल छूट = 120 रुपये

विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य − छूट

= 1200 − 120

= 1080

कुर्सी का विक्रय मूल्य 1080 रुपये ।

**विधि II**

10% छूट अर्थात अंकित मूल्य ₹ 100 हो तो विक्रय मूल्य ₹ 90 होगा ।

$\therefore$ अंकित मूल्य 1200 रुपये होने पर

माना कुल छूट $x$ रुपये हैं ।

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$

$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$

$\therefore x = 1080$

कुर्सी का बिक्री मूल्य 1080 रुपये ।

$\therefore$ कुल छूट = 1200 − 1080 = 120 रुपये ।

**उदा. (3)** अंकित मूल्य पर 20% छूट देकर एक साड़ी 1120 रुपये में बेची गई तब उस साड़ी का अंकित मूल्य कितना था ?

**हल :** माना साड़ी का अंकित मूल्य 100 रुपये है उसपर 20% छूट दी गई अर्थात ग्राहक को वह साड़ी 100 − 20 = 80 रुपये में बेची गई । अर्थात जब विक्रय मूल्य 80 रुपये तब अंकित मूल्य 100 रुपये जब विक्रय मूल्य 1120 रुपये तब माना, अंकित मूल्य $x$ रुपये ।

$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$

$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$

$= 1400$

$\therefore$ साड़ी का अंकित मूल्य 1400 रुपये था ।

**उदा. (4)** कोई दुकानदार एक वस्तु बेचने के लिए कुछ मूल्य मन में निश्चित करता है । वस्तु पर निश्चित किए गए मूल्य से 30% अधिक बढ़ाकर मूल्य अंकित करता है, वस्तु की बिक्री करते समय ग्राहक को 20% छूट देता है, तो दुकानदार को निश्चित किए गए मूल्य की अपेक्षा कितने प्रतिशत अधिक मूल्य मिलेगा ज्ञात कीजिए ।

**हल :** मूल्य में वृद्धि तथा लाभ में वृद्धि का प्रतिशत निश्चित किए गए मूल्य पर है इसलिए मन में निश्चित मूल्य 100 रु मानने पर उदाहरण हल करना आसान होगा ।

$\therefore$ माना वस्तु का निश्चित मूल्य 100 रु ।

यह मूल्य वह 30% अधिक बढ़ाकर अंकित करता है । $\therefore$ अंकित मूल्य = 130 रुपये

छूट = 130 का 20% $= 130 \times \frac{20}{100} = 26$

$\therefore$ विक्रय मूल्य $= 130 - 26 = 104$

$\therefore$ निश्चित मूल्य 100 रुपये हो तो उसे 104 रुपये मिलेंगे ।

अर्थात दुकानदार को उसने निश्चित किया गया मूल्य की अपेक्षा 4% अधिक मिलेगा ।

**उदा. (5)** एक वस्तु पर दुकानदार ग्राहक को 8% छूट देता है तब भी उसे 15% लाभ होता है यदि उस वस्तु का अंकित मूल्य 1750 रुपये हो तब वह वस्तु दुकानदार ने कितने मूल्य पर खरीदा होगा ?

**हल :** वस्तु का अंकित मूल्य = 1750 रुपये, प्रतिशत छूट = 8%

$\therefore$ छूट $= 1750 \times \frac{8}{100} = 140$

वस्तु का विक्रय मूल्य $= 1750 - 140 = 1610$ रुपये

लाभ 15%, अर्थात वस्तु का क्रय मूल्य 100 रुपये हो तब विक्रय मूल्य 115 रुपये ।

अर्थात विक्रय मूल्य 115 रुपये होने पर क्रय मूल्य 100 रुपये

विक्रय मूल्य 1610 रुपये होने पर माना क्रय मूल्य $x$ रुपये ।

$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115}$ $\qquad \therefore \quad x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$

दुकानदार ने वह वस्तु 1400 रुपये में खरीदी होगी ।



**मैंने यह समझा**

- छूट = अंकित मूल्य − विक्रय मूल्य
- छूट यदि $x$ % हो तो $\frac{x}{100} = \frac{\text{प्राप्त छूट}}{\text{अंकित मूल्य}}$

## प्रश्नसंग्रह 9.1

1. अंकित मूल्य = ₹ 1700, बिक्री मूल्य = ₹ 1540 तो छूट ज्ञात कीजिए ।
2. अंकित मूल्य = ₹ 990, प्रतिशत छूट 10, तो विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए ।
3. यदि विक्रय मूल्य = ₹ 900 । प्रतिशत छूट 20, तो अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए ।
4. किसी पंखे का अंकित मूल्य 3000 रुपये है । दुकानदार ने 12 प्रतिशत छूट दी हो तो पंखे पर दी गयी छूट तथा पंखे का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए ।
5. मिक्सर ग्राइंडर का अंकित मूल्य 2300 रुपये है । यह मिक्सर ग्राइंडर 1955 रुपये में मिलता है तो उसकी प्रतिशत छूट कितनी होगी ?
6. किसी दुकानदार द्वारा एक टी वी सेट पर 11% छूट देने पर वह सेट ग्राहक को 22250 रुपये में मिलता है तो उस टी वी सेट का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए ।
7. अंकित मूल्य पर 10% छूट होने पर ग्राहक को कुल छूट 17 रुपये मिलती है । तो ग्राहक को वह वस्तु में प्राप्त होगी यह ज्ञात करने के लिए रिक्त स्थान में योग्य संख्या भरीए ।

   कृति : माना वस्तु का अंकित मूल्य 100 रुपये है ।

   अर्थात ग्राहक को वह वस्तु $\square - \square$ = 90 रुपये में मिलती है ।

   अर्थत जब $\square$ रुपये छूट हो तब विक्रय मूल्य $\square$ रुपये ।

   जब $\square$ रुपये छूट हो तब माना विक्रय मूल्य $x$ रुपये है ।

   $$\therefore \frac{x}{\square} = \frac{\square}{\square} \qquad \therefore x = \frac{\square \times \square}{\square} = \square$$

   $\therefore$ ग्राहक को वह वस्तु 153 रुपये में मिलती है ।

8. किसी दुकानदार ने एक वस्तु को एक निश्चित मूल्य पर बेचने का निश्चय किया और उसका मूल्य निश्चित किए गए मूल्य से 25% अधिक अंकित करता है । वह वस्तु बेचते समय 20% छूट देता है, तो उसके द्वारा निश्चित मूल्य की अपेक्षा से उसे कितनी लाभ या हानि होगी ? मूल्य तथा प्रत्यक्ष विक्रय मूल्य में कितने प्रतिशत का अंतर होगा ।

### आओ जानें

### कमीशन (Commission)

वस्तु का उत्पादन करने वाली कंपनी को अपना माल स्वयं बेचना संभव नहीं होता तब वह कंपनी किसी

व्यक्ति पर अपना माल, उदाहरणार्थ पुस्तक, कपड़े, साबुन आदि वस्तुएँ की बेचने की जिम्मेदारी देती है । ऐसे व्यक्ति को विक्रेता, कमीशन एजेंट ऐसा कहा जाता है । इस सेवा के बदले में उसे कुछ पारिश्रमिक दिया जाता है उसे कमीशन ऐसा कहते हैं । कमीशन प्रतिशत में दिया जाता है । उसके दर वस्तु के अनुसार अलग-अलग होते हैं।

जमीन (भूखंड), घर, पशु-पक्षी इनके मालिकों को ऐसी चींजें बिक्री करते समय आसानी से ग्राहक मिलेंगे ही ऐसा नहीं है । इसलिए बेचनेवाला तथा खरीददार इन्हें पास लाने का कार्य जो व्यक्ति करता है उसे **मध्यस्थ** या **दलाल** या **कमीशन एजेंट** कहते हैं ।

अनाज, सब्जी, फल-फूल इत्यादि कृषि उपज की बिक्री जिस मध्यस्थ के द्‌वारा होती है उस व्यक्ति को **दलाल** या **आढ़तिया** कहते हैं । इस काम के बदले में मध्यस्थ को जो कमीशन मिलता है उसे **दलाली** या **आढ़त** कहते हैं । दलाली या आढ़त जो माल खरीदी करता है या जो माल बेचता है उससे या दोनों से मिल सकती है ।

## हल किये गये उदाहरण

**उदा. (1)** श्रीपति ने एक दलाल के जरिए 2,50,000 रुपये मूल्य का भूखंड सदाशिव को बेचा । दलाल ने दोनों ओर से 2% दलाली ली तो उसे कुल कितनी दलाली प्राप्त हुई ?

**हल :** भूखंड का मूल्य = 2,50,000

$\therefore$ दलाली $= 250000 \times \dfrac{2}{100} = 5000$

दोनों ओर से प्राप्त दलाली $\therefore$ कुल दलाली $= 5000 + 5000 = 10000$ रुपये ।

**उदा. (2)** सुखदेव ने आढ़तिया के माध्यम से 4050 रु. प्रति क्विंटल की दर से 10 क्विंटल गेहूँ बेचा । उसने आढ़तिये को 1% की दर से आढ़त दी तो गेहूँ की बिक्री के पश्चात उसे कितने रुपए प्राप्त हुए ज्ञात कीजिए ।

**हल :** गेहूँ का बिक्री मूल्य $= 10 \times 4050 = 40500$ रुपये, 1 प्रतिशत की दर से आढ़त ।

$\therefore$ दी गई आढ़त $= 40500 \times \dfrac{1}{100} = 405$

$\therefore$ गेहूं बेचने पर प्राप्त राशि = गेहूँ का विक्रय मूल्य − आढ़त

$= 40500 - 405 = 40,095$

गेहूँ बेचने के पश्चात सुखदेव को प्राप्त हुई राशि = 40,095 रुपये ।

## रिबेट (Rebate)

खादी ग्रामोद्योग भंडार, हथकरघा से बनी कपड़े की दुकान, हस्तकला वस्तु बिक्री केंद्र, महिला बचत समूह आदि संस्था कुछ विशेष अवसरों पर ग्राहकों को छूट देती है । उदा. गांधी जयंती के अवसर पर खादी के कपड़ों पर छूट दी जाती है ।

दुकानदार को अंकित मूल्य की अपेक्षा जितनी राशि कम प्राप्त होती है उसकी पूर्ति शासन द्वारा होती है । इस योजना के अंतर्गत ग्राहक को जो छूट मिलती है उसे रिबेट कहते हैं ।

आयकर भरने वाले जिन व्यक्तियों की आय निश्चित सीमा तक होती है, उन्हें आयकर में छूट मिलती है इस छूट को भी रिबेट कहते हैं ।

संक्षेप में रिबेट अर्थात एक प्रकार की छूट ही होती है वह विशिष्ट शर्त के अनुसार मान्यता प्राप्त संस्था या शासन की ओर से दी जाती है ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा.** हथकरघे से निर्मित वस्त्र की एक दुकान से सुधीर ने निम्न वस्तुएँ खरीदीं ।

(i) 2 चादर, प्रत्येक का मूल्य 375 रुपये, (ii) 2 दरियाँ, प्रत्येक का मूल्य 525 रुपये

इसकी खरीदी पर उसे 15 प्रतिशत रिबेट प्राप्त हुआ तो रिबेट की कुल रकम कितनी होगी ? सुधीर द्वारा दुकानदार को कितनी राशि देनी होगी ?

**हल :** 2 चादर का मूल्य $= 2 \times 375 =$ ₹ 750. 2 दरी का मूल्य $= 2 \times 525 =$ ₹ 1050

खरीदी गई वस्तुओं का कुल मूल्य $= 750 + 1050 = 1800$ रुपये ।

अंकित मूल्य पर प्राप्त कुल रिबेट $= 1800 \times \frac{15}{100} = 270$ रुपये ।

$\therefore$ सुधीर द्वारा दुकानदार को दी जानेवाली राशि $= 1800 - 270 = 1530$ रुपये ।

### प्रश्नसंग्रह 9.2

1. जॉन ने एक प्रकाशक की 4500 रुपये की पुस्तकें बेचीं । इसके लिए उसे 15 प्रतिशत कमीशन प्राप्त हुआ तो जॉन को प्राप्त कुल कमीशन कितना है ? ज्ञात करने के लिए रिक्त चौखटो में उचित संख्या लिखिए ।

पुस्तकों का विक्रय मूल्य = ☐ कमीशन का दर = ☐

प्राप्त कमीशन $= \frac{\square}{\square} \times \square$ $\therefore$ कमीशन = ☐ रुपये

2. रफीक ने 4 प्रतिशत दलाली देकर दलाल के माध्यम से 15000 रुपयों के फूलों की बिक्री की तो दलाली ज्ञात कीजिए । रफीक को प्राप्त होनेवाली राशि ज्ञात कीजिए ।

3. किसी आढ़तिया के द्वारा किसान ने 9200 रुपये का माल बेचा । उसे 2% आढ़त देनी पड़ी तो आढ़तिया को कितनी राशि प्राप्त हुई ?

4. उमा दीदी ने खादी भंडार से निम्न वस्तुएँ खरीदीं कीं ।

(i) प्रति नग 560 रुपये अंकित मूल्य की 3 साड़ियाँ

(ii) 90 रु. प्रति बोतल की दर से शहद की 6 बोतलें

इस खरीदी पर उसे 12 प्रतिशत रिबेट प्राप्त हुआ तो, उमा दीदी को वस्तुएँ कितने में प्राप्त हुईं ?

5. दी गई जानकारी के आधार पर निम्नलिखित रिक्त चौखटो में उचित संख्या लिखिए ।

किसी दलाल के माध्यम से श्रीमती दीपांजली ने 7,50,000 का घर श्रीमती लीलाबेन से खरीदा । दलाल ने दोनों की ओर से 2% दलाली ली । तो

(1) श्रीमती दीपांजली ने खरीदने के लिए $\square \times \frac{\square}{\square} = \square$ रुपये दलाली दी ।

(2) लीलाबेन ने मकान बिक्री के लिए $\square$ रुपये दलाली दी ।

(3) दलाल को इस व्यवहार में कुल $\square$ रुपये दलाली प्राप्त हुई ।

(4) श्रीमती दीपांजली को वह मकान $\square$ रुपए में मिला ।

(5) श्रीमती लीलाबेन को मकान बेचकर $\square$ रुपए प्राप्त हुए ।

## उत्तर सूची

### प्रश्नसंग्रह 9.1

1. ₹ 160 2. ₹ 891 3. ₹ 1125 4. छूट ₹ 360 वि.मू. ₹ 2640 5. 11.5%

6. ₹ 25000 8. 0%

### प्रश्नसंग्रह 9.2

2. दलाली ₹ 600, राशि ₹ 14,400 3. ₹ 184 4. ₹ 1953.60

## प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के लिए दिए गए पर्यायों में उचित पर्याय चुनिए ।

(1) $\square$ PQRS में $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ तथा $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ तो निम्नलिखित में से कौन-सी भुजाएँ समांतर हैं ?

(A) भुजा PQ तथा भुजा QR (B) भुजा PQ तथा भुजा SR

(C) भुजा SR तथा भुजा SP (D) भुजा PS तथा भुजा PQ

(2) निम्नलिखित कथन पढ़िए नीचे दिए गए पर्यायों में से योग्य पर्याय चुनिए ।

(i) आयत के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते है ।

(ii) समबाहु चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते हैं ।

(iii) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते हैं ।

(iv) पतंग के विकर्ण परस्पर द्विभाजक होते हैं ।

(A) कथन (ii) तथा (iii) सत्य हैं । (B) केवल कथन (ii) सत्य हैं ।

(C) कथन (ii) तथा (iv) सत्य हैं । (D) कथन (i), (iii), (iv) सत्य हैं ।

(3) $19^3 = 6859$ अगर है तो $\sqrt[3]{0.006859}$ = कितना ?

(A) 1.9 (B)19 (C) 0.019 (D)0.19

2. निम्नलिखित संख्याओं के घनमूल निकालिए ।

(1) 5832 (2) 4096

3. $m \propto n$, जब $m = 25$ तब $n = 15$, तो

(1) $n = 87$ हो तो $m$ कितना होगा ? (2) $m = 155$ हो तो $n$ = ?

4. $x$ तथा $y$ के मध्य प्रत्यक्ष विचलन है । जब $x = 12$ तो $y = 30$ है

(1) अगर $x = 15$ तो $y$ = कितना ? (2) अगर $y = 18$ तो $x$ = ?

5. एक रेखा $l$ खींचिए । उस रेखा से 3.5 सेमी अंतर पर एक समांतर रेखा खींचिए ।

6. $(256)^{\frac{5}{7}}$ यह संख्या किस संख्या का कितना मूल है और कितना घात है यह लिखिए ।

7. विस्तार कीजिए ।

(1) $(5x-7)(5x-9)$ (2) $(2x-3y)^3$ (3) $(a+\frac{1}{2})^3$

8. एक विशाल कोण त्रिभुज खींचिए । उस त्रिभुज की सभी माध्यिका खींचिए और उनका छेदन बिंदु दिखाइए ।

9. $\Delta$ ABC इस प्रकार की रचना कीजिए कि $l$ (BC) = 5.5 सेमी $m\ \angle ABC = 90°$, $l$ (AB) = 4 सेमी इस त्रिभुज के शीर्षलंब छेदक बिंदु दिखाइए ।

10. बस की गति प्रति घंटा 48 किमी हो तो एक गाँव से दूसरे गाँव जाने के लिए 5 घंटे लगते हैं । बस की गति 8 किमी/घंटे कम करने पर, उसी यात्रा के लिए कितने घंटे लगेंगे निकालिए । विचरण का प्रकार पहचानिए तथा प्रश्न हल कीजिए ।

11. रेख AD तथा रेख BE, $\Delta$ ABC की माध्यिकाएँ हैं । G यह माध्यिकाओं का छेदन बिंदु है । यदि $l$(AG) = 5 सेमी तो $l$(GD) = कितना ? और यदि $l$(GE) = 2 सेमी तो $l$(BE) = कितना ?

12. निम्नलिखित परिमेय संख्याएँ दशमलव रुप में लिखिए ।

(1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$

13. गुणनखंड कीजिए ।

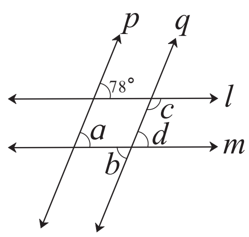
(1) $2y^2-11y+5$ (2) $x^2-2x-80$ (3) $3x^2-4x+1$

14. एक टेलीवीजन सेट की कीमत 50000 रुपये है । यदि दुकानदार ने सेट 15% छूट देकर बेचा हो तो ग्राहक को कितना मूल्य देना पड़ेगा ?

15. राजाभाऊ ने अपना फ्लैट दलाल के जरिए वसंतराव को रुपये 88,00,000 में बेचा । दलाल ने दोनों से 2 % दर से दलाली ली । तो दलाल को कुल कितनी रकम प्राप्त हुई ?

16. $\square$ ABCD समांतर चतुर्भुज खींचिए कि $l$(DC) = 5.5 सेमी, $m\angle D = 45°$, $l$(AD) = 4 सेमी ।

17. आकृति में रेखा $l$ || रेखा m उसी प्रकार रेखा $p$ || रेखा $q$ तो $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ के मान ज्ञात कीजिए ।




## उत्तर सूची

1. (i) B (ii) B (iii) D 2. (1)18 (2) 16 3. (1) 145 (2) 93

4. (1) 24 (2) 20 6. 256 के 7 वें मूल का 5 वाँ घात

7. (1) $25x^2-80x+63$ (2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ (3) $a^3+\frac{3a^2}{2}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{8}$

10. प्रत्यक्ष, 6 घंटे 11. $l$(GD) = 2.5 सेमी, $l$(BE)= 6 सेमी

12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\dot{7}$

13. (1) $(y-5)(2y-1)$ (2) $(x-10)(x+8)$ (3) $(x-1)(3x-1)$

14. ₹42500 15. ₹ 352000 17. 78°, 78°, 102°, 78°

# 10 बहुपदों का भाजन

**थोड़ा याद करें**

पिछली कक्षा में हमने बैजिक व्यंजकों का, जोड़, घटाना एवं गुणा की संक्रियाएँ सीखी हैं ।

निम्नलिखित उदाहरण में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

(1) $2a + 3a = \square$ (2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$ (4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$ (6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$

**आओ जानें**

## बहुपद का परिचय (Introduction to polynomial)

एक चरांकवाले बैजिक व्यंजक के प्रत्येक पद में चर का घातांक पूर्ण संख्या हो तो वह व्यंजक एक चरांकवाले बहुपद होते हैं ।

उदाहरण के लिए, $x^2 + 2x + 3$ ; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ एक चरांकवाले बहुपद हैं ।

बहुपद विशिष्ट बैजिक व्यंजक होते हैं । इसलिए बहुपदों का जोड़, घटाव एवं गुणा की संक्रियाएँ बैजिक व्यंजकों के अनुसार की जाती हैं ।

उदाहरण के लिए, (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$

$= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x\,(4x^3 - 3x^2)$

$= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$

$= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

(2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$

$= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$

$= -3x^2 + 11x - 13$

## बहुपद की कोटि (Degree of a polynomial)

निम्नलिखित उदाहरणों में दिए गए बहुपद में चर के सबसे बड़े घात को चौखट में लिखिए ।

उदा. (1) $3x^2 + 4x$ बहुपद में चर का सबसे बड़ा घात $\boxed{2}$ है ।

उदा. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ बहुपद में चर का सबसे बड़ा घात $\square$ है ।

**दिए गए बहुपदों में चर के सबसे बड़े घात को उस बहुपद की कोटि कहते हैं ।**

### मैंने यह समझा

- एक चरवाले बैजिक व्यंजकों के प्रत्येक पद का घात धन पूर्णांक हो तो वह व्यंजक बहुपद होता है।
- बहुपद में चर का सबसे बड़ा घात उस बहुपद की कोटि होती है ।

### आओ जानें

## (I) एकपदी को एकपदी से भाग देना (To divide a monomial by a monomial)

**उदा. (1)** $15p^3 \div 3p$ भाग दो ।

**हल :** भाग, गुणा के विपरीत संक्रिया है ।

$\therefore$ $15p^3 \div 3p$ भाग करने के लिए, $3p$ एकपदी को कौन-से एकपदी से गुणा करें कि गुणफल $15p^3$ आए, इसपर विचार करना होगा ।

$3p \times 5p^2 = 15p^3 \quad \therefore \; 15p^3 \div 3p = 5p^2$

इस उदाहरण का हल साथ में दर्शाएनुसार किया जाता है ।

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p\overline{)\,15p^3} \\ -\,15p^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

**उदा. (2)** भाग दीजिए एवं चौखट में योग्य पद लिखिए ।

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$ (ii) $(5m^2) \div (-m)$ (iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \square \\ -9x\overline{)\,-36x^4} \\ \square \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square \\ -m\overline{)\,5m^2} \\ \square \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square \\ 2y^3\overline{)\,-20y^5} \\ \square \\ \hline \square \end{array}$$

## बहुपद में एकपदी से भाग देना (To divide a polynomial by a monomial)

निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए एवं बहुपद को एक पद से भाग देने की विधि समझिए ।

**उदा. (1)** $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

**हल :**

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x\overline{)\,6x^3 + 8x^2} \\ -\,6x^3 \quad\quad\;\; \\ \hline 0 + 8x^2 \\ -\,8x^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ भागफल $= 3x^2 + 4x$ एवं शेषफल $= 0$

**उदा. (2)** $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

**हल :**

$$\begin{array}{r|l} & 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ \hline 5y^2 & 15y^4 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-15y^4} \\ & 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ & \underline{-10y^3} \\ & 0 - 3y^2 \\ & \underline{\mp 3y^2} \\ & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

i) $5y^2 \times \boxed{3y^2} = 15y^4$

ii) $5y^2 \times \boxed{2y} = 10y^3$

iii) $5y^2 \times \boxed{\frac{-3}{5}} = -3y^2$

$\therefore$ भागफल $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ एवं शेषफल $= 0$

**उदा. (3)** $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

**हल :**

$$\begin{array}{r|l} & 4p - 2 \\ \hline 3p^2 & 12p^3 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{-12p^3} \\ & 0 - 6p^2 + 4p \\ & \underline{\mp 6p^2} \\ & 0 + 4p \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

i) $3p^2 \times \boxed{4p} = 12p^3$

ii) $3p^2 \times \boxed{-2} = -6p^2$

$\therefore$ भागफल $= 4p - 2$ शेषफल $= 4p$

**उदा. (4)** $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

**हल :**

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2 - 3x + 4 \\ \hline x^2 & 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-5x^4} \\ & 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{\mp 3x^3} \\ & 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ & \underline{-4x^2} \\ & 0 + 2x - 6 \end{array}$$

स्पष्टीकरण –

i) $x^2 \times \boxed{5x^2} = 5x^4$

ii) $x^2 \times \boxed{-3x} = -3x^3$

iii) $x^2 \times \boxed{4} = 4x^2$

$\therefore$ भागफल $= 5x^2 - 3x + 4$ एवं शेषफल $= 2x - 6$

बहुपद में भाग देते समय जब शेषफल शून्य होता है, या शेषफल की कोटि भाजक की कोटि की अपेक्षा छोटी होती होती है तब भाग की संक्रिया पूर्ण होती है ।

उपर्युक्त उदाहरण (3) में, शेषफल $4p$ की कोटि भाजक $3p^2$ की कोटि से छोटी है । इसी प्रकार उदा. (4) में शेषफल $2x - 6$ की कोटि भाजक $x^2$ की कोटि से छोटी है । इसे ध्यान में रखिए ।

## प्रश्नसंग्रह 10.1

**1.** भाग दीजिए । भागफल एवं शेषफल लिखिए ।

(1) $21m^2 \div 7m$

(2) $40a^3 \div (-10a)$

(3) $(-48p^4) \div (-9p^2)$

(4) $40m^5 \div 30m^3$

(5) $(5x^3 - 3x^2) \div x^2$

(6) $(8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$

(7) $(2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$

(8) $(21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$

(9) $(6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$

(10) $(25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$

**आओ जानें**

### बहुपद को द्विपद से भाग देना (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपद को द्विपद से भाग देने कि विधि बहुपद को एकपद से भाग देने की तरह ही होता है ।

**उदा. (1)** $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

**हल :**

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ x + 2 & x^2 + 4x + 4 \\ & \underline{\overset{-}{}x^2 \overset{-}{+} 2x} \\ & 0 + 2x + 4 \\ & \underline{\pm 2x \pm 4} \\ & 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण

(i) सर्वप्रथम भाज्य एवं भाजक को घातांकों के अवरोही क्रम में लिखिए ।

भाजक के प्रथम पद को $x$ से गुणा किया तो भाज्य का प्रथम पद मिलता है ।

$\therefore$ भाजक को $x$ से गुणा कीजिए ।

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ भागफल $= x + 2$ एवं शेषफल $= 0$

**उदा. (2)** $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

**हल :** यहाँ भाज्य की कोटि 4 है । उसमें चर के घात अवरोही क्रम में नहीं है । उसीप्रकार 3 घात वाला पद भी नहीं है । उसे $0y^3$ मानिए और भाज्य को घातांकों के अवरोही क्रम में लिखिए तथा भाग दीजिए ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^3 - 4y^2 + 6y \\
\hline
y + 4 & y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{}y^4 \overset{-}{+} 4y^3} \\
 & 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{+} 4y^3 \overset{-}{+} 16y^2} \\
 & 0 + 6y^2 + 24y \\
 & \underline{\overset{-}{}6y^2 \overset{-}{+} 24y} \\
 & 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ भागफल $= y^3 - 4y^2 + 6y$ एवं शेषफल $= 0$

**उदा. (3)** $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

**हल :**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2 + 5x + 9 \\
\hline
x^2 - 1 & 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\overset{-}{}6x^4 \qquad \overset{-}{+} 6x^2} \\
 & 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 & \underline{\overset{+}{-} 5x^3 \qquad \overset{-}{+} 5x} \\
 & 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{\overset{-}{}9x^2 \qquad \overset{-}{+} 9} \\
 & 0 + 10x + 0
\end{array}
$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ भागफल $= 6x^2 + 5x + 9$ एवं शेषफल $= 10x$

**मैंने यह समझा**

- बहुपद का भाग करने पर जब शेषफल शून्य आता या जब शेषफल की कोटि भाजक की कोटि से छोटी होती है तब भाग की संक्रिया पूर्ण होती है ।
- भाज्य (बहुपद) में यदि पद, घात के अवरोही क्रम में न हो तो उस बहुपद को घात के अवरोही क्रम में लिखिए । ऐसा लिखते समय किसी घात का पद न हो तो उसका गुणांक शून्य मान कर घातों का अवरोही क्रम पूर्ण कीजिए ।

## प्रश्नसंग्रह 10.2

1. भाग दो । भागफल और शेषफल लिखिए ।

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$  (2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$  (4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6★) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7★) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

४५४

## उत्तर सूची

### प्रश्नसंग्रह 10.1

1. $3m$, 0  2. $-4a^2$, 0  3. $\frac{-16}{3}p^2$, 0  4. $\frac{4}{3}m^2$, 0

5. $5x - 3$, 0  6. $4p - 2$, 0  7. $y + 2$, 3  8. $3x$, $-14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$, 0  10. $5m - 3$, $10m + 8$

### प्रश्नसंग्रह 10.2

1. $y + 6$, 0  2. $p + 4$, $-17$

3. $4x^2 + 18x + 75$, 300

4. $m^2 + m + 1$, 10  5. $x^2 + x - 5$, $x - 2$

6. $a - 1$, $a^2 + a - 1$  7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}$, $\frac{-13}{16}$

CQ2K36

# 11 सांख्यिकी

## थोड़ा याद करें

**उदा.** निनाद द्‌वारा किसी पुस्तक के प्रतिदिन पढ़े जाने वाले पृष्ठों की संख्या 60, 50, 54, 46, 50 है । इसके आधार पर प्रतिदिन पढ़े जाने वाले पृष्ठों का औसत ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $$\text{औसत} = \frac{\text{सभी प्राप्तांकों का योगफल}}{\text{कुल प्राप्तांकों की संख्या}}$$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore$ प्रतिदिन पढ़े जाने वाले पृष्ठों का औसत $\square$ है ।

इस औसत को माध्य या मध्यमान कहते हैं ।

## आओ जानें

उपर्युक्त उदाहरण में प्रतिदिन पढ़े जाने वाले पृष्ठों की संख्या यह सांख्यिकीय जानकारी है । इसके आधार पर यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि निनाद द्‌वारा प्रतिदिन साधारणत: 52 पृष्ठ पढ़े गए ।

इस पद्‌धति से घटना अथवा समस्या से संबधित जानकारी इकट्‌ठा करना, उस जानकारी का अध्ययन करके कुछ निष्कर्ष प्राप्त करना, यह एक स्वतंत्र ज्ञान की शाखा है । इसी शाखा का नाम **सांख्यिकी** है ।

### माध्य (Mean)

हमने देखा कि 60, 50, 54, 46 तथा 50 का औसत 52 आता है । इस औसत को सांख्यिकी भाषा में माध्य कहते हैं । सांख्यिकीय सामग्री का माध्य ज्ञात करने के लिए सामग्री की संख्याओं का योग करते हैं । इस योगफल को सामग्री की कुल संख्या से भाग देते हैं ।

हम माध्य ज्ञात करने की इस विधि का अधिक अध्ययन करेंगे । इसके लिए निम्नलिखित उदाहरण देखिए ।

**उदा.** किसी विद्‌यालय में 8 वीं कक्षा के 37 विद्‌यार्थियों को गणित विषय के 10 अंक के टेस्ट में प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं । इन अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए ।

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

**हल :** इस उदाहरण में सामग्री के संख्याओं का योगफल करने के लिए अधिक समय लगेगा । हमें पता है कि, 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 × 5 = 35। इस आधार पर किसी संख्या में वही संख्या मिलाने की क्रिया आसान होती है, इसे ध्यान में रखें । इसका ही उपयोग करके उपर्युक्त सामग्री के संख्याओं का योगफल करना आसान होगा । इसलिए सामग्री के संख्याओं का वर्गीकरण करके संख्याओं का योग कीजिए ।

| (प्राप्तांक) अंक $x_i$ | गणन चिह्न | विद्‌यार्थियों की संख्या (बारंबारता) $f_i$ | $f_i \times x_i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | \| | 1 | $1 \times 2 = 2$ |
| 3 | \| | 1 | $1 \times 3 = 3$ |
| 4 | 𝍸 | 5 | $5 \times 4 = 20$ |
| 5 | \|\| | 2 | $2 \times 5 = 10$ |
| 6 | 𝍸 | 5 | $5 \times 6 = 30$ |
| 7 | 𝍸 \| | 6 | $6 \times 7 = 42$ |
| 8 | 𝍸 | 5 | $5 \times 8 = 40$ |
| 9 | 𝍸 \|\|\| | 8 | $8 \times 9 = 72$ |
| 10 | \|\|\|\| | 4 | $4 \times 10 = 40$ |
| | | N = 37 | $\Sigma f_i x_i = 259.$ |

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{259}{37} = 7$$

उपर्युक्त प्रकार से सारणी तैयार कर दी गई संख्या का माध्य ज्ञात करने के निम्नलिखित सोपानों को ध्यान में रखिए ।

- पहले स्तंभ में $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ इस प्रकार बढ़ते क्रम में प्राप्तांकों को लिखिए । इन्हें $x_i$ से दर्शाया गया है ।
- दूसरे स्तंभ में गणन चिह्न लिखिए ।
- तीसरे स्तंभ में प्रत्येक प्राप्तांक से संबधित गणन चिह्न गिनकर बारंबारता लिखिए । यह बारंबारता $f_i$ से दर्शाया गया है । उसके नीचे सभी बारंबारताओं का योग लिखिए । कुल बारंबारता N से दर्शाई गई है ।
- अंतिम स्तंभ में $f_i \times x_i$ का गुणनफल लिखिए । उसके नीचे सभी गुणनफलों का योग लिखिए। $f_i \times x_i$ गुणनफलों का योग $\Sigma f_i \times x_i$ से दर्शाया जाता है । $\Sigma$ (सिग्मा) यह चिह्न ‘योग’ के लिए प्रयुक्त होता है । माध्य $\overline{x}$ (एक्स बार) से दर्शाते हैं ।

$$\therefore \text{माध्य } \overline{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N}$$

**उदा.** राजापुर गाँव के 30 किसानों के सोयाबीन का प्रति एकड़ उत्पादन क्विंटल में निम्नलिखित प्रकार से है ।

9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,

6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.

इस आधार पर बारंबारता वितरण सारणी बनाइए और सोयाबीन के प्रति एकड़ उत्पादन का औसत ज्ञात कीजिए ।

**उकल :**

| प्रति एकड़ उत्पादन (क्विंटल) (प्राप्तांक) $x_i$ | गणन चिह्न | किसानों की संख्या (बारंबारता) $f_i$ | $f_i \times x_i$ |
|---|---|---|---|
| 4 | \|\|\| | 3 | 12 |
| 5 | 卌 | 5 | 25 |
| 5.5 | \|\|\|\| | 4 | 22 |
| 6 | \|\|\| | 3 | 18 |
| 6.5 | \|\| | 2 | 13 |
| 7.5 | \|\|\|\| | 4 | 30 |
| 8 | 卌 \| | 6 | 48 |
| 9 | \|\|\| | 3 | 27 |
| | | N = 30 | $\Sigma f_i x_i = 195.$ |

माध्य $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{195}{30} = 6.5$

सोयाबीन के प्रति एकड़ उत्पादन का औसत (माध्य) 6.5 क्विंटल ।

## प्रश्नसंग्रह 11.1

1. कक्षा 8 वीं के 30 विद्यार्थियों में से प्रत्येक द्वारा लगाए गए पौधे की संख्या निम्नलिखित बारंबारता सारणी में दी गई है । इसके आधार पर प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाए गए पौधे का माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चौखट पूर्ण कीजिए ।

| पौधों की संख्या (प्राप्तांक ) $x_i$ | विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) $f_i$ | $f_i \times x_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 6 | ☐ |
| 3 | 12 | ☐ |
| 4 | 8 | ☐ |
| | N = ☐ | $\Sigma f_i x_i$ = ☐ |

माध्य $\overline{x} = \frac{\square}{N}$

$= \frac{\square}{\square}$

$= \square$

∴ प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाए गए पौधे का माध्य ☐ है ।

**2.** एकलारा गाँव के 25 परिवारों द्‌वारा मई महीने में उपयोग में लाई गई बिजली (यूनिट में) निम्नलिखित सारणी में दी गई है । सारणी पूर्ण करके निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

| बिजली का उपयोग (प्राप्तांक) $x_i$ | परिवारों की संख्या (बारंबारता) $f_i$ | $f_i \times x_i$ |
|---|---|---|
| 30 | 7 | ....... |
| 45 | 2 | ....... |
| 60 | 8 | ....... |
| 75 | 5 | ....... |
| 90 | 3 | ....... |
| | N = ....... | $\Sigma f_i x_i$ =....... |

(1) 45 यूनिट बिजली का उपयोग करने वाले कुल कितने परिवार हैं ?

(2) जिस प्राप्तांक की बारंबारता 5 है वह प्राप्तांक कौन-सा है?

(3) N = कितना? $\Sigma f_i x_i$ = कितना?

(4) सारणी के आधार पर मई महीने में प्रत्येक परिवार द्‌वारा उपयोग में लाई गई बिजली का माध्य ज्ञात कीजिए ।

**3.** भिलार में 40 परिवारों के सदस्यों की संख्या आगे दिए अनुसार है । 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2. इस आधार पर इन 40 परिवारों के सदस्यों का माध्य बारंबारता सारणी का उपयोग करके ज्ञात कीजिए ।

**4.** 'मॉडल हाइस्कूल, नांदुपुर' द्‌वारा राज्यस्तरीय विज्ञान प्रदर्शनी में पिछले 20 वर्षों में प्रस्तुत किए गए विज्ञान तथा गणित के प्रकल्पों की संख्या निम्नानुसार है । इस आधार पर बारंबारता सारणी तैयार कर सामग्री का माध्य ज्ञात कीजिए । 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.



**आओ जानें**

पिछली कक्षा में हमने स्तंभालेख तथा संयुक्त स्तंभालेख का अध्ययन किया है । अब कुछ अन्य स्तंभालेख का अध्ययन करें ।

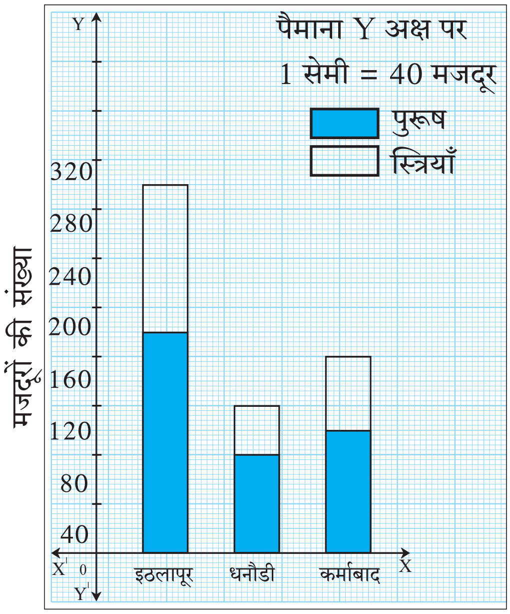
## विभाजित स्तंभालेख (Subdivided bar diagram)

सामग्री में जानकारी का तुलनात्मक विश्लेषण संयुक्त स्तंभालेख की तरह ही विभाजित स्तंभालेख द्‌वारा भी किया जाता है । इसमें दो या अधिक घटकों की जानकारी एक ही स्तंभ में दर्शाई जाती है । विभाजित स्तंभालेख ज्ञात करने के सोपान देखें ।

| गाँव | इठलापुर | धनोडी | कर्माबाद |
|---|---|---|---|
| पुरुष मजदूर | 180 | 80 | 100 |
| स्त्री मजदूर | 120 | 40 | 60 |
| कुल मजदूर | 300 | ☐ | ☐ |

- सर्वप्रथम सामग्री की जानकारी के आधार पर सारणी तैयार कीजिए ।

- आलेख कागज पर X- अक्ष तथा Y- अक्ष खींचिए ।
- समान दूरी लेकर, X- अक्ष पर गाँव का नाम लिखिए ।
- Y - अक्ष पर मजदूरों की संख्या लिखिए । 1 सेमी = 40 मजदूर यह पैमाना लीजिए ।
- इठलापुर गाँव में कुल 300 मजदूर हैं । मजदूरों की यह संख्या किसी स्तंभ से दर्शाइए ।



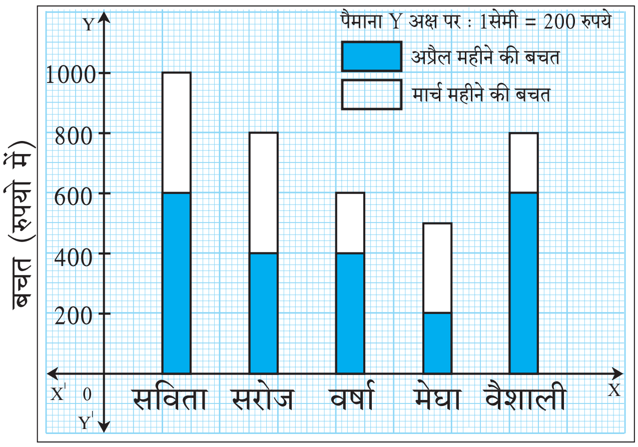
गाँव का नाम

- इसमें पुरुष मजदूर कुल मजदूरों के स्तंभ का एकभाग है, इसे किसी चिह्न से दर्शाइए ।
- स्तंभ का शेष भाग स्वाभाविक रुप से स्त्री मजदूरों की संख्या दर्शाएगा । इसे भिन्न चिह्न से दर्शाइए ।
- इसी प्रकार धानोडी तथा कर्मबाद गाँवों के लिए विभाजित स्तंभ खींचिए ।

संलग्न विभाजित स्तंभालेख उपर्युक्त सोपानों के अनुसार खींचकर दर्शाया गया है । इसका निरीक्षण कीजिए ।

## प्रश्नसंग्रह 11.2

1. निम्नलिखित आकृति का निरीक्षण करके प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।



महिला

(1) यह आकृति किस प्रकार के स्तंभालेख की है ?

(2) अप्रैल महीने में वैशाली की बचत कितनी है ?

(3) सरोज की मार्च तथा अप्रैल महीने की कुल बचत कितनी है ?

(4) सविता की कुल बचत मेघा की कुल बचत से कितनी अधिक है ?

(5) अप्रैल महीने में सबसे कम बचत किसकी है ?

2. जिला परिषद के किसी विद्यालय के 5 वीं से 8 वीं कक्षा में विद्यार्थी तथा विद्यार्थिनियों की संख्या निम्नलिखित सारणी में दी गई है । इसपर आधारित विभाजित स्तंभालेख खींचिए ।
(पैमाना : Y अक्ष पर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी लीजिए ।)

| कक्षा | 5 वीं | 6 वीं | 7 वीं | 8 वीं |
|---|---|---|---|---|
| छात्र | 34 | 26 | 21 | 25 |
| छात्राएँ | 17 | 14 | 14 | 20 |

3. निम्नलिखित सारणी में चार गाँवों के वर्ष 2016 और 2017 में लगाए गए पौधों की संख्या दी गई है । सारणी में दी गई जानकारी विभाजित स्तंभालेख से दिखाइए ।

| गाँव / वर्ष | कर्जत | वडगाँव | शिवापुर | खंडाला |
|---|---|---|---|---|
| 2016 | 150 | 250 | 200 | 100 |
| 2017 | 200 | 300 | 250 | 150 |

4. निम्नलिखित सारणी में तीन शहरों के 8 वीं कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा विद्यालय जाने के लिए उपयोग में लाए गए वाहनों की तथा पैदल जाने वालों की जानकारी दी गई है । इस जानकारी को दर्शाने वाला विभाजित स्तंभालेख खींचिए । (पैमाना : Y अक्ष पर – 1 सेमी = 500 विद्यार्थी लीजिए।)

| शहर / साधन | पैठण | येवला | शहापुर |
|---|---|---|---|
| साईकिल | 3250 | 1500 | 1250 |
| बस तथा ऑटो | 750 | 500 | 500 |
| पैदल | 1000 | 1000 | 500 |

## आओ जानें

### प्रतिशत स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

आर्वी इस गाँव में लगाए गए 60 वृक्षों में से 42 वृक्ष बचे और मोर्शी में लगाए गए 75 वृक्षों में से 45 वृक्ष बचे । बार्शी गाँव में लगाए गए 90 वृक्षों में से 45 वृक्ष बचे ।

किस गाँव में वृक्षारोपण अधिक सफल हुआ इसे समझने के लिए केवल संख्या पर्याप्त नहीं है । इसके लिए जीवित वृक्षों का प्रतिशत निकालना पड़ता है ।

आर्वी में जीवित वृक्षों का प्रतिशत $= \frac{42}{60} \times 100 = 70$ ।

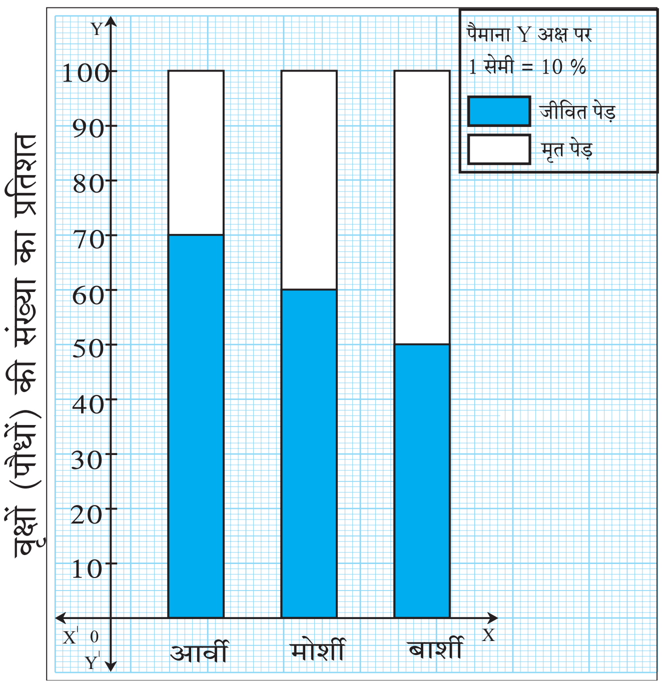
मोर्शी में जीवित वृक्षों का प्रतिशत $= \frac{45}{75} \times 100 = 60.$

इन प्रतिशतों से यह पता चलता है कि आर्वी गाँव के जीवित वृक्षों की संख्या कम होने पर भी उनका प्रतिशत अधिक है । अर्थात प्रतिशत के आधार पर भिन्न प्रकार की जानकारी मिलती है । दी गई जानकारी

प्रतिशत में रुपांतरित करके जो विभाजित स्तंभालेख खींचते हैं, उसे प्रतिशत स्तंभालेख कहते हैं । अर्थात प्रतिशत स्तंभालेख विभाजित स्तंभालेख का विशेष रुप है । यह प्रतिशत स्तंभालेख निम्नलिखित सोपानो के आधार पर खींचिए ।

- सर्वप्रथम निम्नानुसार सारणी तैयार कीजिए ।

| गाँव | आर्वी | मोर्शी | बार्शी |
|---|---|---|---|
| लगाए गये कुल वृक्ष | 60 | 75 | 90 |
| जीवित वृक्ष | 42 | 45 | 45 |
| जीवित वृक्षों का प्रतिशत | $\frac{42}{60} \times 100 = \boxed{70}$ | $\frac{45}{75} \times 100 = \boxed{60}$ | $\frac{45}{90} \times 100 = \boxed{50}$ |



गाँवों के नाम

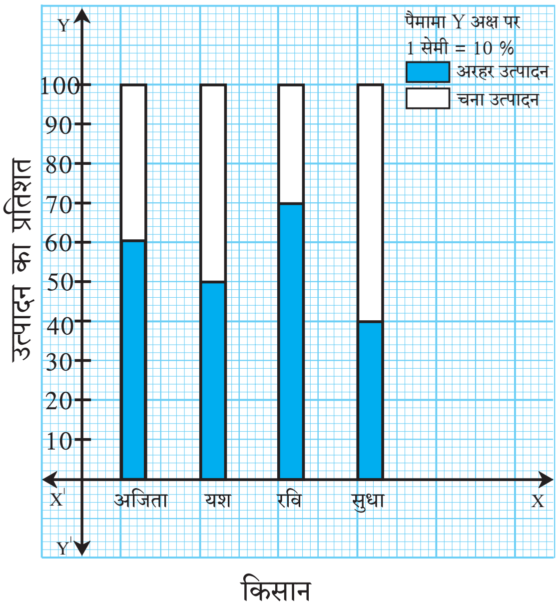
- प्रतिशत स्तंभालेख में सभी स्तंभ 100 इकाई ऊँचाई का लेते हैं ।
- प्रत्येक स्तंभ में जीवित वृक्षों का प्रतिशत दर्शाइए। शेष प्रतिशत मृत वृक्षों का होगा ।
- प्रतिशत स्तंभालेख यह एक प्रकार का विभाजित स्तंभालेख होने से बाकी सभी कृति विभाजित स्तंभालेख खींचने के कृति जैसे होती है । उपर्युक्त सोपानों के अनुसार ही संलग्न स्तंभालेख खींचा गया है । इसका निरीक्षण कीजिए।

## प्रश्नसंग्रह 11.3

1. निम्नलिखित सारणी की जानकारी के आधार पर प्रतिशत स्तंभालेख खींचिए ।

| आठवीं कक्षा का विभाग | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| गणित में A श्रेणी में उत्तीर्ण विद्यार्थी | 45 | 33 | 10 | 15 |
| कुल विद्यार्थी | 60 | 55 | 40 | 75 |

2. दिए गए स्तंभालेख का निरीक्षण करके प्रश्नों के उत्तर लिखिए ।




(1) संलग्न स्तंभालेख किस प्रकार का है ?

(2) अजित के खेत में अरहर दाल का उत्पादन कुल उत्पादन का कितने प्रतिशत है ?

(3) यश और रवि में से किसके चना उत्पादन का प्रतिशत कितना अधिक है ?

(4) अरहर के उत्पादन का सबसे कम प्रतिशत किसका है ?

(5) सुधा के अरहर तथा चना का उत्पादन कितने प्रतिशत है ?

3. किसी विद्यालय के कक्षा दसवीं के विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से प्राप्त जानकारी निम्नलिखित सारणी में दी गई है । यह जानकारी प्रतिशत स्तंभालेख से दर्शाइए ।

| विद्यालय | पहली | दूसरी | तीसरी | चौथी |
|---|---|---|---|---|
| विज्ञान शाखा में रुचि | 90 | 60 | 25 | 16 |
| वाणिज्य शाखा में रुचि | 60 | 20 | 25 | 24 |

**उपक्रम :** प्रतिशत स्तंभालेख तथा विभाजित स्तंभालेख की तुलनात्मक चर्चा कीजिए । इसका उपयोग करके विज्ञान, भूगोल जैसे विषयों में ऐसे आलेखों की जानकारी लीजिए ।

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 11.1** 2. (1) 2 (2) 45 (3) N = 25, $\Sigma f_i \times x_i = 1425$ (4) 57

3. 3.9 4. 2.75

**प्रश्नसंग्रह 11.2** 1. (1) विभाजित स्तंभालेख (2) ₹ 600 (3) ₹ 800

(4) ₹ 500 (5) मेघा की

**प्रश्नसंग्रह 11.3** 2. (1) प्रतिशत स्तंभालेख (2) 60%

(3) यश का उत्पादन 20% से अधिक (4) सुधा की

(5) 40% और 60%

CQBG4T

# 12 एक चरांकवाले समीकरण

### थोड़ा याद करें

पिछली कक्षा में हमने एक चरांकवाले समीकरणों का अध्ययन किया है ।

- समीकरण में दिए गए चर के लिए जो मान रखने पर समीकरण के दोनों पक्ष समान होते हैं, वह मान उस समीकरण का हल होता है ।
- समीकरण को हल करना अर्थात उसका हल खोजना है ।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान क्रिया हुई तो प्राप्त समीकरण सही होता है । इस गुणधर्म का उपयोग करके हम नये तथा आसान समीकरण बनाकर समीकरण को हल करते हैं ।

समीकरण के दोनों पक्षों में की जाने वाली क्रिया ।

(i) दोनों पक्षों में समान संख्या मिलाना ।
(ii) दोनों पक्षों में से समान संख्या से घटाना ।
(iii) दोनों पक्षों में समान संख्या से गुणा करना ।
(iv) दोनों पक्षों में समान संख्या से भाग देना ।

निम्नलिखित समीकरण हल करने के लिए खाली चौखटें पूर्ण कीजिए ।

**उदा. (1)** $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \square = 9 - \square$$

$$\therefore \; x = \square$$

**उदा. (2)** $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \square = 7 + \square$$

$$\therefore \; x = \square$$

**उदा. (3)** $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \square = 4 \times \square$$

$$\therefore \; x = \square$$

**उदा. (4)** $4x = 24$

$$\frac{4x}{\square} = \frac{24}{\square}$$

$$\therefore \; x = \square$$

### आओ जानें

## एक चरांकवाले समीकरण का हल (Solution of equation in one variable)

कभी–कभी समीकरण हल करने के लिए उसपर एक से अधिक क्रियाएँ करनी पड़ती है । ऐसे समीकरण के दोनों पक्षों में क्रिया करके हल प्राप्त करने के कुछ उदाहरण देखें ।

**उदा. (1)** दिए गए समीकरण हल कीजिए ।

(i) $2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$

**हल** : दोनों पक्षों में 5 से गुणा करने पर

$10(x - 3) = 3(x + 4)$

$\therefore\ 10x - 30 = 3x + 12$

दोनों पक्षों में 30 जोड़ने पर

$\therefore\ 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$

$10x = 3x + 42$

दोनों पक्षों में से 3$x$ से घटाने पर

$\therefore\ 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$

$\therefore\ 7x = 42$

दोनों पक्षों में 7 से भाग देने पर

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$

$\therefore\ x = 6$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

**हल** : दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर

$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$

$\therefore\ 9x = 6x + 33$

दोनों पक्षों में से 6$x$ घटाने पर

$\therefore\ 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$

$\therefore\ 3x = 33$

दोनों पक्षों में 3 से भाग दो

$\therefore\ \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$

$\therefore\ x = 11$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

**हल** : **विधि I**

$\frac{2}{3} + 5a = 4$

प्रत्येक पद में 3 से गुणा कीजिए

$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$

$\therefore\ 2 + 15a = 12$

$\therefore\ 15a = 12 - 2$

$\therefore\ 15a = 10$

$\therefore\ a = \frac{10}{15}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

**विधि II**

दोनों पक्षों में से $\frac{2}{3}$ घटाने पर,

$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{12-2}{3}$

$\therefore\ 5a = \frac{10}{3}$

दोनों पक्षों में 5 से भाग करने पर,

$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$

$\therefore\ a = \frac{2}{3}$

यदि A, B, C, D शून्येतर राशियों के लिए $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, तो दोनों पक्षों में B $\times$ D से गुणा करने पर AD = BC समीकरण प्राप्त होता है । इसका उपयोग करके प्रश्न हल कीजिए ।

(iv) $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$

**हल** : $\dfrac{(x-7)}{(x-2)} = \dfrac{5}{4}$,

$\therefore\ 4(x - 7) = 5(x - 2)$

$\therefore\ 4x - 28 = 5x - 10$

$\therefore\ 4x - 5x = -10 + 28$

$\therefore\ -x = 18 \qquad \therefore\ x = -18$

(v) $\dfrac{8m-1}{2m+3} = 2$

**हल** : $\dfrac{8m-1}{2m+3} = \dfrac{2}{1}$

$1(8m - 1) = 2(2m + 3)$

$\therefore\ 8m - 1 = 4m + 6$

$\therefore\ 8m - 4m = 6 + 1$

$\therefore\ 4m = 7 \qquad \therefore\ m = \dfrac{7}{4}$

## प्रश्नसंग्रह 12.1

**1.** प्रत्येक समीकरण के बाद चर के लिए दिया गया मान, उस समीकरण का हल है क्या ? निश्चित कीजिए ।

(1) $x - 4 = 3$, $x = -1, 7, -7$ (2) $9m = 81$, $m = 3, 9, -3$

(3) $2a + 4 = 0$, $a = 2, -2, 1$ (4) $3 - y = 4$, $y = -1, 1, 2$

**2.** निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए ।

(1) $17p - 2 = 49$ (2) $2m + 7 = 9$ (3) $3x + 12 = 2x - 4$

(4) $5(x - 3) = 3(x + 2)$ (5) $\dfrac{9x}{8} + 1 = 10$ (6) $\dfrac{y}{7} + \dfrac{y-4}{3} = 2$

(7) $13x - 5 = \dfrac{3}{2}$ (8) $3(y + 8) = 10(y - 4) + 8$ (9) $\dfrac{x-9}{x-5} = \dfrac{5}{7}$

(10) $\dfrac{y-4}{3} + 3y = 4$ (11) $\dfrac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$

### आओ जानें

### शाब्दिक उदाहरण (Word Problems)

शाब्दिक उदाहरण में दी गई जानकारी के लिए चर का उपयोग करके वह जानकारी बैजिक राशि में कैसे लिखते हैं देखिए ।

मेरी आयु $x$ वर्ष है ।

- मेरे पिता जी की उम्र मेरी उम्र से 32 वर्ष अधिक है । ∴ पिता जी की उम्र ☐ वर्ष
- मेरी दादी जी की उम्र मेरी आयु के चार गुने से 10 वर्ष अधिक है । ∴ दादी की $(4x + 10)$ वर्ष
- मेरी बहन की आयु मुझसे चार वर्ष कम है । ∴ बहन की आयु ☐ वर्ष
- मेरे मित्र की आयु मेरी आयु के आधे से 5 अधिक है । ∴ मित्र की आयु ☐ वर्ष
- मेरी माँ की आयु मेरी आयु की तिगुनी है ∴ माँ की आयु ☐ वर्ष

पूर्व में दी गई जानकारी के अनुसार मेरे मित्र की आयु यदि 12 वर्ष है तो मेरी आयु कितनी है?

मेरी आयु = $x$ वर्ष $\quad \therefore$ मित्र की आयु = $\frac{x}{2} + 5$

$\frac{x}{2} + 5 = 12$ ...... (दिया है)

$\therefore x + 10 = 24$ ...... (प्रत्येक पद में 2 से गुणा करने पर)

$\therefore x = 24 - 10$

$\therefore x = 14$

$\therefore$ मेरी आयु 14 वर्ष है । इसके आधार पर उपर्युक्त जानकारी से अन्य व्यक्तियों की आयु ज्ञात कीजिए ।

**कृति :** चौखट में उचित संख्या लिखिए ।

चौड़ाई का तीन गुना लंबाई

मैं आयत हूँ ।
मेरी परिमिति 40 सेमी

चौड़ाई $x$

आयत की परिमिति = 40

$2(\square x + \square x) = 40$

$2 \times \square x = 40$

$\square x = 40$

$x = \square$

$\therefore$ आयत की चौड़ाई = $\square$ सेमी तथा आयत की लंबाई = $\square$ सेमी

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** जोसेफ का वजन उसके छोटे भाई के वजन का दुगुना है । दोनों का कुल वजन 63 किग्रा है । तो जोसेफ का वजन ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना जोसेफ के छोटे भाई का वजन $x$ किग्रा है ।

$\therefore$ जोसेफ का वजन उसके भाई के वजन का दुगुना = $2x$

$\therefore$ दी गई जानकारी के आधार पर $x + 2x = 63$

$\therefore 3x = 63 \quad \therefore x = 21$

$\therefore$ जोसेफ का वजन = $2x = 2 \times 21 = 42$ किग्रा.

**उदा. (2)** किसी भिन्न का अंश उसके हर से 5 अधिक है । अंश तथा हर प्रत्येक में 4 जोड़ने पर भिन्न $\frac{6}{5}$ प्राप्त होता है । तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना भिन्न का हर $x$ है ।

$\therefore$ उस भिन्न का अंश, हर से 5 अधिक अर्थात $x + 5$ है ।

$\therefore$ वह भिन्न $\frac{x+5}{x}$ है ।

उसके अंश तथा हर में 4 मिलाने पर नया भिन्न $\frac{6}{5}$ होगा ।

$\therefore \quad \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore \quad \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$

$\therefore\ 5(x + 9) = 6(x + 4)$

$\therefore\ 5x + 45 = 6x + 24$

$\therefore\ 45 - 24 = 6x - 5x$

$\therefore\ 21 = x$

$\therefore$ भिन्न का हर 21, अंश = 21 + 5 = 26

$\therefore$ वह भिन्न = $\frac{26}{21}$

**उदा. (3)** रत्ना के पास की राशि (रुपये) रफीक के पास की राशि के तिगुने से 200 रुपये अधिक है । रत्ना के पास से 300 रुपये लेकर रफीक को दिया तो रत्ना के पास की राशि रफीक से $\frac{7}{4}$ गुनी हो जाती है । तो रफीक के पास कितने रुपये थे ? मूल राशि प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित कृति पूरी कीजिए ।

**हल :** रत्ना के पास रुपये (राशि), रफीक के पास की राशि के तिगुने से 200 रुपये अधिक है ।

माना रफीक के पास राशि $x$ $\qquad \therefore$ रत्ना के पास राशि ☐ रुपये

$\therefore$ रत्ना के पास से 300 रुपये लेकर रफीक को दिया, इसलिए रत्ना के पास शेष ☐ रुपये ।

$\therefore$ रफीक के पास कुल $x + 300$ रुपये ।

रत्ना के पास की राशि अब रफीक के पास की राशि का $\frac{7}{4}$ पट हो गई ।

$\frac{\text{रत्ना के पास राशि}}{\text{रफीक के पास राशि}} = \frac{☐}{☐}$

$\frac{3x-100}{x+300} = \frac{☐}{☐}$

4 ☐ = 7 ☐

$12x - 400 = 7x + 2100$

$12x - 7x =$ ☐

$5x =$ ☐

$x =$ ☐

$\therefore$ रफीक के पास ☐ रुपये थे ।

## प्रश्नसंग्रह 12.2

1. माँ की आयु बेटे की आयु से 25 वर्ष अधिक है । 8 वर्ष बाद बेटे तथा माँ की आयु का अनुपात $\frac{4}{9}$ हो जाएगा तो बेटे की आयु ज्ञात कीजिए ।

2. किसी भिन्न का हर उसके अंश से 12 अधिक है । उसके अंश में से 2 घटाने तथा हर में 7 जोड़ने पर प्राप्त भिन्न $\frac{1}{2}$ के सममूल्य होता है । तो उस भिन्न का मान बताइए ।

3. पीतल के मिश्रण में तांबे तथा जस्ते का अनुपात 13 : 7 हो तो 700 ग्राम वजनवाले पीतल के बर्तन में जस्ते की मात्रा कितनी होगी ?

4*. तीन क्रमिक पूर्ण संख्याओं का योगफल 45 से अधिक किंतु 54 से कम है तो वह संख्या ज्ञात कीजिए ।

5. दो अंकोंवाली एक संख्या के दहाई स्थान का अंक इकाई स्थान के अंक की दुगुना है । अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त संख्या तथा मूल संख्या का योगफल 66 हो तो दी गई संख्या कितनी है ?

6*. किसी एक नाट्यगृह में नाटक के लिए 200 रुपये वाले तथा 100 रुपये वाले कुछ टिकट बेचे गए । 200 रुपयेवाले टिकटों की संख्या 100 रुपये वाले टिकटों की संख्या से 20 अधिक रही । दोनों प्रकार के टिकटों की बिक्री से नाट्यगृह को 37000 रुपये मिले हों तो 100 रुपये वाले कितने टिकट बिके ?

7. तीन क्रमिक प्राकृत संख्याओं में से सबसे छोटी संख्या का पाँच गुना सबसे बड़ी संख्या के चार गुने से 9 अधिक है तो वह संख्या कौन-सी है ?

8. राजू ने एक साइकिल 8% लाभ लेकर अमित को बेची । अमित ने 54 रुपये खर्च करके उसे दुरुस्त करायी । उसी साइकिल को उसने निखिल को 1134 रुपयों में बेची । अमित को इस व्यवहार में कोई लाभ या हानि नहीं हुई हो तो राजू ने वह साइकिल कितने में खरीदी थी ?

9. किसी क्रिकेट खिलाड़ी ने एक मैच में 180 रन बनाए । दूसरे मैच में उसने 257 रन बनाए । तीसरे मैच में उसने कुल कितने रन बनाए होंगे कि उन मैचों में उसके रनों का औसत 230 हो जाएगा ?

10. सुधीर की आयु वीरू की आयु के तिगुने से 5 अधिक है । अनिल की आयु सुधीर की आयु की आधी है । सुधीर और वीरु के आयु का योगफल तथा अनिल की आयु के तीगुने का अनुपात 5:6 हो तो वीरु की आयु ज्ञात कीजिए ।

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 12.1** 1. समीकरण के हल का मान (1) $x = 7$ (2) m = 9 (3) $a = -2$
(4) $y = -1$ 2. (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$
(7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

**प्रश्नसंग्रह 12.2** 1. 12 वर्ष 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 ग्राम
4. 15, 16, 17 या 16, 17, 18 5. 42 6. 110
7. 17, 18, 19 8. ₹ 1000 9. 253 10. 5 वर्ष

CQKC6G

# 13 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

**थोड़ा याद करें** –

साथ की आकृति से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर खोजिए ।

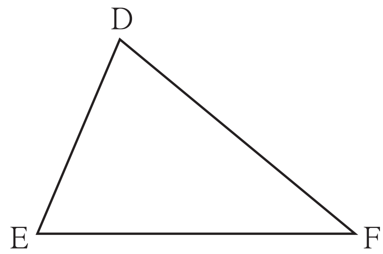
(i) भुजा DE का सम्मुख कोण कौनसा है ?

(ii) $\angle$ E किस भुजा का सम्मुख कोण है ?

(iii) भुजा DE तथा भुजा DF में समाविष्ट कोण कौनसा?

(iv) $\angle$ E तथा $\angle$ F में समाविष्ट भुजा कौनसी ?

(v) भुजा DE के संलग्न कौनसे कोण है ?

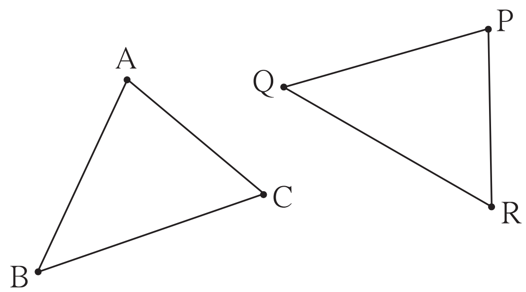



- जो आकृतियाँ परस्पर हूबहू मिलती है उन आकृतियो को सर्वांगसम आकृति कहते है ।
- जिन रेखाखंडो की लंबाई समान होती है वे रेखाखंड सर्वांगसम होते है ।
- जिन कोणों के माप समान होते है वे कोण सर्वांगसम होते हैं ।

**आओ जानें**

## त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles)

**कृति :** संलग्न आकृतियाँ देखो । पारदर्शक ट्रेसिंग पेपर पर $\Delta$ ABC बनाकर वह कागज $\Delta$ PQR पर रखकर देखिए । बिंदु A को बिंदु P पर, बिंदु B को बिंदु Q पर तथा बिंदु C को बिंदु R पर रखकर देखो दोनों त्रिभुज हूबहू मिलते हैं (ढक लेते हैं) अर्थात वे सर्वांगसम है ऐसा दिखाई देगा ।



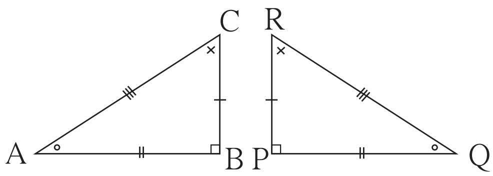

कृति में $\Delta$ ABC को $\Delta$ PQR पर रखने की एक पद्धति दी गई हैं । परंतु बिंदु A को Q पर, बिंदु B को R पर तथा बिंदु C को P पर रखने पर त्रिभुज परस्पर हूबहू नही मिलेंगे । अर्थात विशिष्ट पद्धति से ही उन्हें एक दूसरे से मिलाना होता है । एक दूसरे से मिलाने की पद्धति एक-एक संगति द्वारा दर्शाई जाती है । बिंदु A की संगति बिंदु P से है, इसे A $\leftrightarrow$ P ऐसा लिखते है । यहाँ A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q, C $\leftrightarrow$ R इस संगति से त्रिभुज सर्वांगसम है । इस पद्धति से त्रिभुज सर्वांसम होने पर $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$,

∠C ≅ ∠R तथा रेख AB ≅ रेख PQ, रेख BC ≅ रेख QR, रेख CA ≅ रेख RP ऐसी छह सर्वांगसमता प्राप्त होती है । इसलिए Δ ABC तथा Δ PQR, ABC ↔ PQR इस संगति द्‌वारा सर्वांगसम है, ऐसा कहा जाता है । तथा Δ ABC ≅ Δ PQR ऐसा लिखते हैं । इस प्रकार लिखने में A ↔ P, B ↔ Q, C ↔ R यह शीर्षबिंदुओं की एकैकी संगति तथा उसके कारण प्राप्त छह सर्वांगसमताओं का अंतर्भाव होता है । इसलिए दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह लिखते समय शीर्षबिंदुओं का क्रम सर्वांगसमता की एकैकी संगति का पालन करता हो इस ओर ध्यान दीजिए ।



### आओ चर्चा करें

Δ ABC तथा Δ PQR इन सर्वांगसम त्रिभुजों के सर्वांगसम घटक समान चिह्नों द्‌वारा दर्शाए गए हैं ।




अनिल, रेहाना तथा सुरजित ने इन त्रिभुजों के सर्वांगसमता का लेखन निम्नानुसार किया था ।

अनिल का लेखन : Δ ABC ≅ Δ QPR

रेहाना का लेखन : Δ BAC ≅ Δ PQR

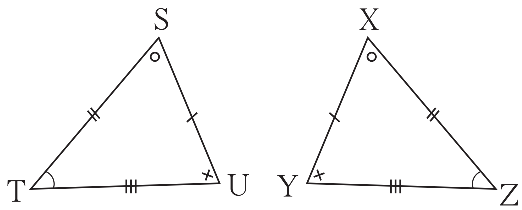
सुरजित का लेखन : Δ ABC ≅ Δ PQR

इनमें से कौन-सा लेखन सही है तथा कौन-सा गलत है । चर्चा कीजिए ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** साथ की आकृति में समान चिह्नों द्‌वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं ।

(i) शीर्षबिंदुओं के जिस एकैकी संगति द्‌वारा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं उस संगति में त्रिभुजों की सर्वांगसमता दो प्रकार से लिखिए ।




(ii) Δ XYZ ≅ Δ STU यह लेखन सही है या गलत, कारणसहित लिखिए ।

**हल** : निरीक्षण द्‌वारा दिए गए त्रिभुज STU ↔ XZY इस एकैकी संगति द्‌वारा सर्वांगसम हैं ।

(i) एक प्रकार : Δ STU ≅ Δ XZY, दूसरा प्रकारः Δ UST ≅ Δ YXZ

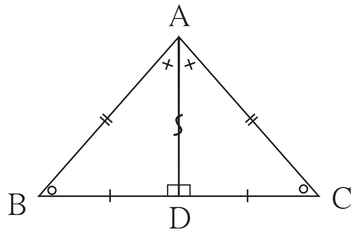
इसी सर्वांगसमता को और अन्य प्रकार से लिखने का प्रयास कीजिए ।

(ii) इन त्रिभुजों की सर्वांगसमता Δ XYZ ≅ Δ STU ऐसी लिखने पर भुजा ST ≅ भुजा XY ऐसा अर्थ होगा और यह गलत है ।

∴ Δ XYZ ≅ Δ STU यह लेखन गलत है ।

($\Delta$ XYZ $\cong$ $\Delta$ STU इस लेखन द्वारा और भी कुछ गलतियाँ होती हैं । वे विद्यार्थियों को खोजनी हैं परंतु उत्तर क्यों गलत है ? यह बताने के लिए एक गलती दिखाना पर्याप्त है ।)

**उदा. (2)** आगे दी गई आकृति में, त्रिभुजों की जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । उन त्रिभुजों के शीर्षबिंदुओं के कौन-से एकैकी संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यह बताकर त्रिभुजों की सर्वांगसमता चिह्न द्वारा दर्शाइए ।




**हल** : $\Delta$ABD तथा $\Delta$ACD में भुजा AD सामान्य रेखाखंड है ।

प्रत्येक रेखाखंड स्वयं के सर्वांगसम होता है ।

**संगति** : A $\leftrightarrow$ A, B $\leftrightarrow$ C, D $\leftrightarrow$ D. $\Delta$ ABD $\cong$ $\Delta$ ACD

**टीप** : सामान्य भुजा पर ' ʃ ' ऐसा चिह्न लगाने की पद्धति है ।

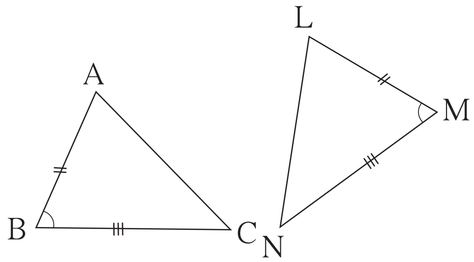
**आओ जानें**

किसी जोड़ी के त्रिभुज सर्वांगसम हैं यह दिखाने के लिए सभी छह घटकों की सर्वांगसमता दिखाने की आवश्यक्ता नहीं होती । एक त्रिभुज के तीन विशिष्ट घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों तो शेष तीन घटकों की जोड़ियाँ भी परस्पर सर्वांगसम होती हैं, अर्थात वे विशिष्ट तीन घटक सर्वांगसमता की कसौटी निश्चित करते हैं ।

कुछ त्रिभुजों की रचना करना हमने सीखा है । जो तीन घटक दिए गए हों तो त्रिभुज की एकमेव आकृति बनाई जा सकती है वे ही घटक सर्वांगसमता की कसौटियाँ निश्चित करते हैं, इसे हम जाँच कर देखेंगे ।

### (1) दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण : भुकोभु कसौटी

भुजाओं की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों तथा उनमें समाविष्ट कोण भी सर्वांगसम हो, ऐसे $\Delta$ABC तथा $\Delta$LMN बनाइए ।

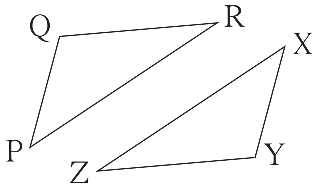



$\Delta$ABC तथा $\Delta$LMN में $l$(AB) = $l$(LM), $l$(BC) = $l$(MN), $m\angle$ABC = $m\angle$LMN

$\Delta$ABC को ट्रेसिंग पेपर पर बनाकर ट्रेसिंग पेपर $\Delta$LMN पर इस प्रकार रखिए की शीर्षबिंदु A को शीर्षबिंदु L पर, भुजा AB को भुजा LM पर, $\angle$B को $\angle$M तथा भुजा BC को भुजा MN पर रखेंगे । $\Delta$ABC $\cong$ $\Delta$LMN है ऐसा दिखाई देगा ।

**(2) तीन संगत भुजाएँ : भुभुभु कसौटी**

$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$



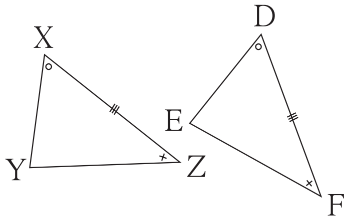

इस प्रकार त्रिभुज $\Delta PQR$ तथा $\Delta XYZ$ बनाइए ।

ट्रेसिंग पेपर पर $\Delta PQR$ बनाकर वह $\Delta XYZ$ पर $P \leftrightarrow X$, $Q \leftrightarrow Y$, $R \leftrightarrow Z$ इस प्रकार एकैकी संगति से रखिए । $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ दिखाई देगा ।

**(3) दो कोण तथा समाविष्ट भुजा : कोभुको कसौटी**

$\Delta XYZ$ तथा $\Delta DEF$ ऐसे बनाइए कि,

$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D$ तथा $\angle Z \cong \angle F$



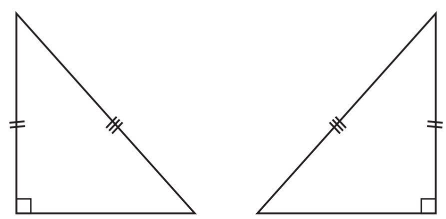

ट्रेसिंग पेपर पर $\Delta XYZ$ बनाकर वह पेपर $\Delta DEF$ पर रखिए । $X \leftrightarrow D$, $Y \leftrightarrow E$, $Z \leftrightarrow F$ इस संगति के अनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ दिखाई देंगे ।

**(4) कोकोभु (अथवा भुकोको) कसौटी :**

दो त्रिभुजों में संगत कोणों की दो जोड़ियाँ सर्वांगसम हों, तो शेष कोण भी सर्वांगसम होते हैं । क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का योगफल $180^\circ$ होता है । इसलिए कोई दो कोण तथा एक कोण की संलग्न भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण तथा संगत भुजा से सर्वांगसम हो तो कोभुको कसौटी की शर्त पूरी होती है तथा वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

**(5) समकोण त्रिभुज की कर्ण भुजा कसौटी**

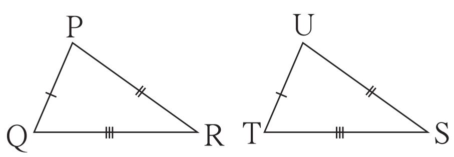
समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दी गई हो तो एकमेव त्रिभुज की रचना की जा सकती है । किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण तथा एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो ऐसे दो समकोण त्रिभुज बनाकर उपरोक्त विधि के अनुसार वे सर्वांगसम है क्या ? जाँच कीजिए ।



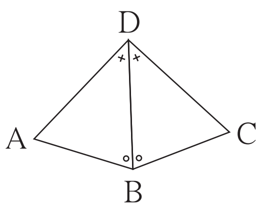
**हल किए गए उदाहरण**

**उदा. (1)** आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी के अनुसार तथा शीर्षबिंदुओं के किस एकैकी संगति के अनुसार सर्वांगसम हैं ? लिखिए ।

(i)




(ii)

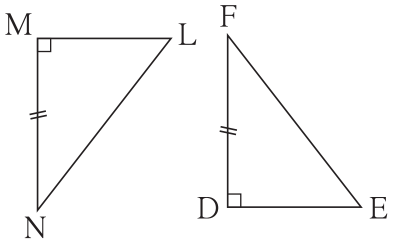


**हल** : (i) भु-भु-भु कसौटी द्वारा PQR $\leftrightarrow$ UTS इस संगति से

(ii) को-भु-को कसौटी द्वारा DBA $\leftrightarrow$ DBC इस संगति से

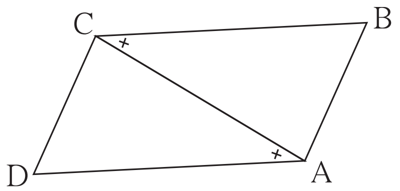
**उदा. (2)** आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुज की प्रत्येक जोड़ियों में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक आकृति के नीचे त्रिभुजों की सर्वांगसमता की कसौटी लिखी गई है । उस कसौटी द्वारा त्रिभुजों को सर्वांगसम होने के लिए और क्या जानकारी देना आवश्यक है तथा वह जानकारी देने के बाद त्रिभुज शीर्षबिंदुओं की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम होंगे, लिखिए ।

(i)




कर्ण भुजा कसौटी

(ii)




कोभुको कसौटी

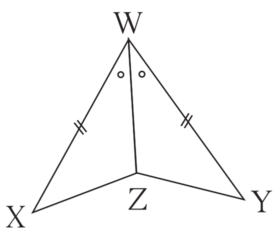
**हल** : (i) दिए गए त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं । उनकी एक-एक भुजा सर्वांगसम है । इसलिए उनके रेख LN तथा EF विकर्ण सर्वांगसम है, यह जानकारी देना आवश्यक है । यह जानकारी देने पर LMN $\leftrightarrow$ EDF इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ।

(ii) आकृति के त्रिभुजों की रेख CA सामान्य भुजा है इसलिए $\angle$ DCA $\cong$ $\angle$ BAC यह जानकारी देने पर DCA $\leftrightarrow$ BAC इस संगति द्वारा त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ।

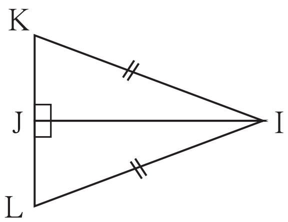
## प्रश्नसंग्रह 13.1

**1.** आगे दी गई आकृतियों के त्रिभुजों की प्रत्येक जोड़ी में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम है । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज किस कसौटी तथा शीर्षबिंदुओ की किस एकैकी संगति द्वारा सर्वांगसम हैं, लिखिए ।

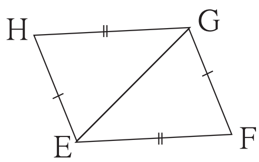
(i)



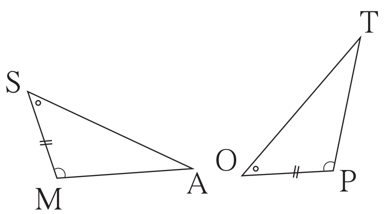

(ii)



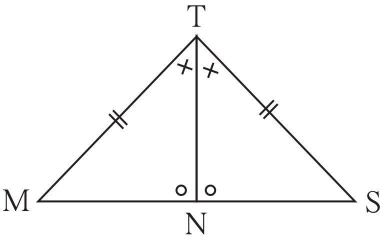

(iii)




(iv)




(v)



## मैंने यह समझा

(1) **भु–को–भु कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजा तथा उनके द्‌वारा समाविष्ट कोण से सर्वांगसम हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(2) **भु–भु–भु कसौटी**: यदि किसी त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीन संगत भुजाओं से सर्वांगसम हों, तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(3) **को–भु–को कसौटी** : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट भुजा के सर्वांगसम होती हों तो, वे त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

(4) **को–को–भु कसौटी :** यदि किसी त्रिभुज के दो कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत कोण तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसी संगत भुजा से सर्वांगसम हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

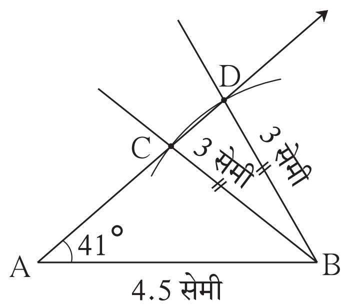
(5) **कर्ण–भुजा कसौटी** : किसी समकोण त्रिभुज का विकर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के विकर्ण तथा संगत भुजा के सर्वांगसम हों तो वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होते हैं ।

**अधिक जानकारी हेतु**

किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनमें समाविष्ट न हो ऐसा कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हों, तो क्या वे दो त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम होगे ?

$\Delta$ ABC तथा $\Delta$ ABD में,

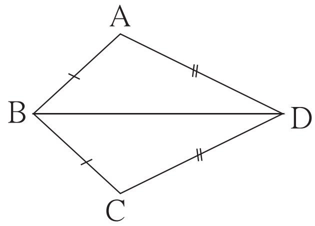
AB सामान्य भुजा है । भुजा BC $\cong$ भुजा BD, $\angle$ A सामान्य कोण है । परंतु सर्वांगसम भुजाओं द्‌वारा वह कोण समाविष्ट किया गया कोण नहीं है । अर्थात एक त्रिभुज के तीन घटक दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हैं परंतु वे त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं ।




इस आधार पर किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके द्‌वारा समाविष्ट न किया गया कोण दूसरे त्रिभुज के संगत घटकों से सर्वांगसम हो, तो वे दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे ही ऐसा नहीं है ।

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** आकृति में, □ ABCD की सर्वांगसम भुजाएँ समान के चिह्नों द्वारा दर्शाई गई है । इस आकृति में सर्वांगसम कोणों की जोडियाँ हैं क्या, खोजिए ।




**हल** : $\Delta$ ABD तथा $\Delta$ CBD में,

भुजा AB $\cong$ भुजा CB ..... (दिया गया है)

भुजा DA $\cong$ भुजा DC ..... (दिया गया है)

भुजा BD सामान्य भुजा है ।

$\therefore$ $\Delta$ ABD $\cong$ $\Delta$ CBD ...... (भु-भु-भु कसौटी के अनुसार)

$\therefore \angle$ BAD $\cong \angle$ BCD

$\therefore \angle$ ABD $\cong \angle$ CBD

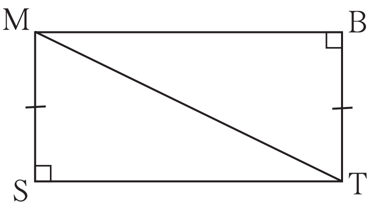
$\angle$ ADB $\cong \angle$ CDB

} ....(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

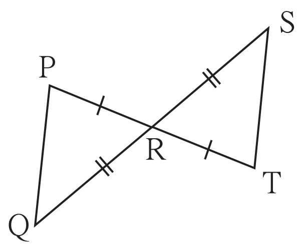
## प्रश्नसंग्रह 13.2

1. आगे दी गई प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में समान चिह्नों द्वारा दर्शाए गए घटक सर्वांगसम हैं । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुज, शीर्षबिंदुओ के किस संगति से तथा किस कसौटी द्वारा सर्वांगसम हैं लिखिए । प्रत्येक जोड़ी के त्रिभुजों में शेष संगत सर्वांगसम घटक लिखिए ।

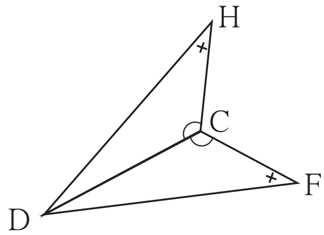
(1)



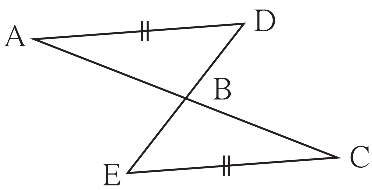

(2)




(3)




2*. संलग्न आकृति में, रेख AD $\cong$ रेख EC है और कौन-सी जानकारी देने पर $\Delta$ABD तथा $\Delta$EBC भुकोको कसौटी के अनुसार सर्वांगसम होंगे ?




२२२

### उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 13.1** 1. (i) भुकोभु, XWZ $\leftrightarrow$ YWZ (ii) कर्णभुजा KJI $\leftrightarrow$ LJI (iii) भुभुभु HEG $\leftrightarrow$ FGE (iv) कोभुको SMA $\leftrightarrow$ OPT (v) कोभुको या भुकोको MTN $\leftrightarrow$ STN

**प्रश्नसंग्रह 13.2** 1. (1) $\Delta$ MST $\cong$ $\Delta$ TBM - कर्णभुजा, भुजा ST $\cong$ भुजा MB, $\angle$ SMT $\cong \angle$ BTM, $\angle$ STM $\cong \angle$ BMT (2) $\Delta$ PRQ $\cong$ $\Delta$ TRS - भुकोभु, भुजा PQ $\cong$ भुजा TS, $\angle$ RPQ $\cong \angle$ RTS, $\angle$ PQR $\cong \angle$ TSR (3) $\Delta$ DCH $\cong$ $\Delta$ DCF - भुकोको, $\angle$ DHC $\cong \angle$ DFC, भुजा HC $\cong$ भुजा FC

2. $\angle$ ADB $\cong \angle$ ECB तथा $\angle$ ABD $\cong \angle$ EBC अथवा $\angle$ DAB $\cong \angle$ CEB

CQU884

# 14 चक्रवृद्धि ब्याज

**थोड़ा याद करें**

कोई व्यक्ति बैंक, पत संस्था, ऐसी संस्थाओं से कुछ राशि निश्चित ब्याज की दर से कर्ज लेता है और कुछ समय पश्चात ली हुई राशि वापस करता है । उस राशि का उपयोग करके उसके बदले कुछ अधिक राशि बैंक को देता है उसे ब्याज कहते हैं । साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए $I = \frac{PNR}{100}$ यह सूत्र हमने सीखा है । इस सूत्र में I = ब्याज, P = मूलधन, N = समय (वर्ष में) और R = प्र.श.प्र.व. ब्याज

**आओ जानें**

## चक्रवृद्धि ब्याज (Compound interest)

जमा या कर्ज पर बैंक चक्रवृद्धि ब्याज लेती है, वह क्यों और कैसे हम सीखेंगे ।

अध्यापिका : सज्जनराव ने किसी बैंक से 10 प्र.श.प्र.व. की दर से 1 वर्ष में वापसी की शर्त पर 10,000 रुपये कर्ज लिया, तो वर्ष के अंत में उसे ब्याजसहित कितनी राशि देनी पड़ेगी ?

विद्‌यार्थी : P = 10,000 रु. ; R = 10; N = 1 वर्ष

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ रुपये}$$

∴ सज्जनराव को वर्ष के अंत में ब्याजसहित 10,000 + 1000 = 11,000 रुपये देने पड़ेंगे ।

विद्‌यार्थी : किंतु यदि कोई कर्जदार वर्ष के अंत में ब्याज की राशि भी भर नहीं सका तो ?

अध्यापिका : बैंक प्रत्येक वर्ष के अंत में ब्याज की गणना करता है तथा हर वर्ष कर्जदार से वह ब्याज की राशि बैंक में जमा करने की अपेक्षा करता है । कर्जदार प्रथम वर्ष के पश्चात ब्याज नहीं दिया तो बैंक द्‌वारा द्‌वितीय वर्ष के लिए मूलधन और प्रथम वर्ष का ब्याज मिलाकर जो मिश्रधन होता है वही राशि मूलधन मानकर ब्याज की गणना की जाती है अर्थात द्‌वितीय वर्ष में ब्याज की गणना करते समय मूलधन की राशि प्रथम वर्ष के मिश्रधन के बराबर होती है । इस पद्‌धति से की गई ब्याज की गणना को **चक्रवृद्‌धि ब्याज** कहते हैं ।

विद्‌यार्थी : सज्जनराव ने कर्ज वापसी का समय (अवधि) एक वर्ष के लिए बढाई तो?

अध्यापिका : तो द्‌वितीय वर्ष के लिए 11,000 रुपये मूलधन मानकर उसपर ब्याज और मिश्रधन ज्ञात करना पड़ेगा ।

विद्‌यार्थी : इसके लिए पिछली कक्षा में सीखा हुआ $\frac{\text{मिश्रधन}}{\text{मूलधन}} = \frac{110}{100}$ यह अनुपात उपयोग में लाए तो चलेगा न ?

अध्यापिका : बिलकुल ! प्रत्येक वर्ष के लिए $\frac{\text{मिश्रधन}}{\text{मूलधन}}$ यह अनुपात अचर है । चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करते समय पिछले वर्ष का मिश्रधन यह आगे के वर्ष का मूलधन होता है । इसलिए ब्याज के बजाय सीधा मिश्रधन ज्ञात करना आसान होगा । प्रथम वर्ष के पश्चात मिश्रधन $A_1$, द्वितीय वर्ष के पश्चात मिश्रधन $A_2$, तृतीय वर्ष के पश्चात मिश्रधन $A_3$ ऐसा लिखिए ।

प्रथम मूलधन P था ।

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

द्वितीय वर्ष का मिश्रधन ज्ञात करने के लिए

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

विद्यार्थी : फिर तृतीय वर्ष का मिश्रधन $A_3$ ज्ञात करने के लिए

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \quad \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

अध्यापिका : शाबास ! यह चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन ज्ञात करने का सूत्र है । यहाँ ध्यान में रखे कि, $\frac{110}{100}$ यह एक रुपए की वर्ष के अंत में होने वाला मिश्रधन है । जितने वर्षों का मिश्रधन ज्ञात करना उतने ही समय मूलधन को अनुपात से गुणा कीजिए ।

विद्यार्थी : अर्थात माना कि, प्रथम वर्ष के अंत में $\frac{\text{मिश्रधन}}{\text{मूलधन}}$ यह अनुपात M है तथा P मूलधन हो ऐसा माननेपर वर्ष के अंत में मिश्रधन $P \times M$, द्वितीय वर्ष के अंत में मिश्रधन $P \times M^2$ तथा तृतीय वर्ष के अंत में मिश्रधन $P \times M^3$ होता है । इस पद्धति से कितने भी वर्ष का मिश्रधन ज्ञात कर सकते हैं ।

अध्यापिका : एकदम सही ! ब्याज की दर प्र.श.प्र.व. हो, तो

$$\therefore \text{ 1 रुपये का 1 वर्ष का मिश्रधन} = 1 \times M = 1 \times \left(1+\frac{R}{100}\right) \text{ है ।}$$

$$\therefore \text{ P रुपये का 1 वर्ष का मिश्रधन} = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right) = P \times \frac{100+R}{100}$$

∴ मूलधन P, ब्याज की दर R, प्र.श.प्र.व., समय N वर्ष हो, तो

$$\text{N वर्ष के पश्चात मिश्रधन, } A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** $12\frac{1}{2}$ प्र.श.प्र.व. की दर से 4000 रुपये का 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ।

**हल** : यहाँ, P = 4000 रु.; R = $12\frac{1}{2}$ %; N = 3 वर्ष ।

$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^N = P\left(1+\frac{12.5}{100}\right)^3$

$= 4000\left(1+\frac{125}{1000}\right)^3$

$A = 4000\left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000\left(\frac{9}{8}\right)^3$

$= 5695.31$ रुपये

$\therefore$ तीन वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज (I) = मिश्रधन – मूलधन

= 5695.31 – 4000 = 1695.31 रुपये

## प्रश्नसंग्रह 14.1

**1.** चक्रवृद्धि ब्याज से प्राप्त होनेवाला मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ।

| अ.क्र. | मूलधन (रुपये) | दर (प्र.श.प्र.व.) | समय (वर्ष) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2000 | 5 | 2 |
| 2 | 5000 | 8 | 3 |
| 3 | 4000 | 7.5 | 2 |

**2.** 12 प्र.श.प्र.व. की दर से समीरराव ने किसी पत संस्था से 3 वर्ष के लिए 12500 रुपये कर्ज लिया । तो उन्हें तीसरे वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि ब्याज की गणना से कितने रुपये वापस करने पड़ेंगे ?

**3.** व्यापार शुरु करने के उद्देश्य से शलाका ने $10\frac{1}{2}$ प्र.श.प्र.व. की दर से 8000 रुपये कर्ज लिया । तो 2 वर्ष के पश्चात कर्ज वापस करते समय चक्रवृद्धि ब्याज की गणना से उसे कितना ब्याज भरना पड़ेगा ?

**अधिक जानकारी हेतु**

1. कुछ आर्थिक व्यवहार में प्रति (हर) छह महीने में ब्याज की गणना कि जाती है । N वर्ष की अवधि के लिए ब्याज की दर R हो तो छहमाही ब्याज की गणना में दिए गए मूलधन में ब्याज की दर $\frac{R}{2}$ लेते हैं । N वर्ष के लिए छह महीने के 2N कालखंड इसे ध्यान में रखकर ब्याज निर्धारित करते हैं ।

2. कई वित्त संस्थाएँ मासिक ब्याज की गणना से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करते हैं तब ब्याज का मासिक दर $\frac{R}{12}$ लेते हैं और अवधि $12 \times N$ कुल महीने से ब्याज की गणना करते हैं ।

3. पिछले कुछ समय से बैंक प्रतिदिन ब्याज की गणना से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करते हैं ।

**उपक्रम :** आपके नजदीक की बैंक में जाकर वहाँ की विभिन्न योजनाओं की जानकारी प्राप्त कीजिए । उन योजनाओं के ब्याज की दर की सारणी तैयार करके उसे कक्षा में लगाइए ।

### आओ जानें

## चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का उपयोजन (Application of formula for compound interest)

चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन ज्ञात करने के लिए सूत्र का उपयोग दैनंदिन जीवन में और भी क्षेत्रों के उदाहरण हल करने के लिए किया जा सकता है; जैसे जनसंख्या में वृद्धि, किसी वाहन का प्रतिवर्ष कम होने वाला मूल्य आदि ।

किसी वस्तु को कुछ समय उपयोग में लाकर बेचने पर उसका मूल्य खरीदे मूल्य से कम होता है । कम होने वाले मूल्य को कमी या अवपात (depreciation) कहते हैं ।

मूल्य की फिसलन (कमी) निश्चित समय में निश्चित दर से होती रहती है । उदा. यंत्रो का मूल्य प्रतिवर्ष निश्चित प्रतिशत से कम होता है । कुछ समय पश्चात कम हुआ मूल्य ज्ञात करने के लिए चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का उपयोग होता है ।

यह मूल्य ज्ञात करने के लिए अवपात की दर पता होनी चाहिए । वस्तु का मूल्य कम होने पर अवपात की दर R ऋणात्मक लेते हैं ।

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** किसी शहर की जनसंख्या में 8 प्र.श.प्र.व. की दर से वृद्धि होती है । वर्ष 2010 उस शहर की जनसंख्या 2,50,000 हो तो वर्ष 2012 में उस शहर की जनसंख्या कितनी होगी ?

**हल** : यहाँ, P = 2010 की जनसंख्या = 2,50,000

A = 2012 में की जनसंख्या;

R = जनसंख्या वृद्धि की दर = प्रतिवर्ष 8%

N = 2 वर्ष

A = 2012 में अर्थात 2 वर्ष में होने वाली जनसंख्या

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= 2,91,600.$$

$\therefore$ 2012 में शहर की जनसंख्या 2,91,600 होगी ।

**उदा. (2)** रेहाना ने वर्ष 2015 में एक स्कूटर 60000 रुपये में खरीदा था । अवपात की दर 20 प्र.श.प्र.व. हो तो 2 वर्ष के पश्चात स्कूटर का मूल्य कितना होगा ?

**हल** : यहाँ, P = 60000 रु. A = 2 वर्ष के पश्चात प्राप्त होने वाला मूल्य

R = अवपात की दर = −20 % प्रतिवर्ष N = 2 वर्ष

A = 2 वर्ष पश्चात प्राप्त होने वाला मूल्य

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$= 60000 \times \left(1+\frac{-20}{100}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1-\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

A = 38400 रु.

∴ दो वर्ष के पश्चात स्कूटर का मूल्य 38400 रुपये होगा ।

चक्रवृद्धि ब्याज की पद्धति से ब्याज की गणना के सूत्र में A, P, N, R इन चार मुद्दों में से कोई तीन मुद्दे देने पर चौथा मुद्दा कैसे ज्ञात करते हैं ? यह निम्नलिखित उदाहरण में अध्ययन करेंगे ।

**उदा. (3)** 10 प्र.श.प्र.व. की दर से किसी राशि का तीन वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन 6655 रुपये हो तो वह राशि ज्ञात कीजिए ।

**हल** : यहाँ A = 6655 रुपये; R = 10 प्र.श.प्र.व. ; N = 3 वर्ष ।

$$A = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore\ 6655 = P \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore\ P = \frac{6655\times10^3}{11\times11\times11} \qquad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ वह राशि 5000 रुपये हैं ।

**उदा. (4)** 10 प्र.श.प्र.व. की दर से 9000 रुपये का कितने वर्षो में चक्रवृद्धि ब्याज 1890 रुपये होगा ?

**हल** : यहाँ R = 10; P = 9000; चक्रवृद्धि ब्याज = 1890

सर्व प्रथम चक्रवृद्धि ब्याज के प्राप्त मिश्रधन ज्ञात करेंगे ।

$$A = P + I = 9000 + 1890 = 10890$$

चक्रवृद्धि ब्याज से प्राप्त मिश्रधन का सूत्र लिखकर उसमे मान रखेंगे ।

$$A = 10890 = P \times \left(1+\frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^N = 9000\left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \qquad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore \quad N = 2$

$\therefore$ 2 वर्ष पश्चात चक्रवृद्धि ब्याज 1890 रुपये होगा ।

## प्रश्नसंग्रह 14.2

1. किसी उड्डाण पुल बनवाना प्रारंभ करते समय कुल 320 मजदूर काम करते थे । यदि मजदूरों की संख्या में प्रतिवर्ष 25% की वृद्धि होती हो तो दो वर्ष के पश्चात कुल कितने मजदूर काम पर रहेंगे ?
2. किसी गड़रिया के पास 6200 भेड़ें हो और प्रतिवर्ष उनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है तो 2 वर्ष के पश्चात उसके पास कितनी भेड़ें होंगी ?
3. किसी जंगल में 40,000 वृक्ष हैं । यदि वृक्षों की संख्या में प्रतिवर्ष 5% की वृद्धि निश्चित की गई हो तो उस जंगल में 3 वर्षो के पश्चात वृक्षों की संख्या कितनी होनी चाहिए ?
4. आज एक मशीन 2,50,000 रुपये में खरीदी गई । उसके मूल्य में प्रतिवर्ष 10% की दर से अवपात होता हो, तो दो वर्ष के पश्चात उस मशीन का मूल्य क्रयमूल्य से कितना कम होगा ?
5. किसी मूलधन का 16 प्र.श.प्र.व. चक्रवृद्धि ब्याज की दर से दो वर्ष का मिश्रधन 4036.80 रुपये हुआ तो दो वर्ष में ब्याज कितना होगा ?
6. 12 प्र.श.प्र.व. की दर से 15000 रुपये चक्रवृद्धि ब्याज से कर्ज लिया तो कर्ज वापसी के 3 वर्ष में उसे कितने रुपये देने पड़ेंगे ?
7. 18 प्र.श.प्र.व की दर से किसी मूलधन का चक्रवृद्धि ब्याज से 2 वर्ष का मिश्रधन 13,924 रुपये हुआ, तो मूलधन कितना था ?
8. किसी शहर के एक उपनगर की जनसंख्या में विशिष्ट दर से वृद्धि होती है, आज की तथा दो वर्ष पश्चात की जनसंख्या 16000 तथा 17640 हो तो जनसंख्या वृद्धि का दर ज्ञात कीजिए ।
9. 10 प्र.श.प्र.व. की दर से 700 रुपये का कितने वर्षों में मिश्रधन 847 रुपये होगा ?

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 14.1** 1. (1) 2205, 205 (2) 6298.56, 1298.56 (3) 4622.5, 622.5 2. 17561.60 3. 1768.2

**प्रश्नसंग्रह 14.2** 1. 500 2. 242 3. ₹ 46,305 4. ₹ 47500 5. ₹ 1036.80 6. ₹ 21073.92 7. ₹ 10,000 8. प्र.श.प्र.व. 5 9. N = 2 वर्ष में

CR449R

# 15 क्षेत्रफल

**थोड़ा याद करें**

हम जानते हैं कि बहुभुजाकृति की भुजा सेंटीमीटर, मीटर, किलोमीटर इन इकाइयों में दी हो तब उसका क्षेत्रफल क्रमश: व सेमी, व.मी., व किमी इन इकाइयों में दी जाती है क्योंकि क्षेत्रफल वर्ग में नापा जाता है ।

(1) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा$^2$

(2) आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

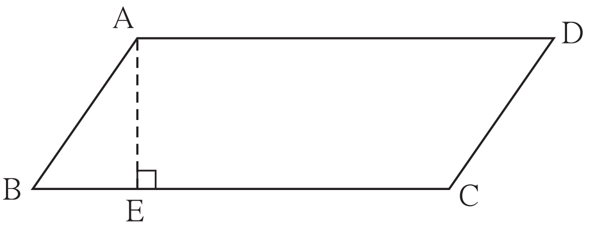
(3) समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल
$= \frac{1}{2} \times$ समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल

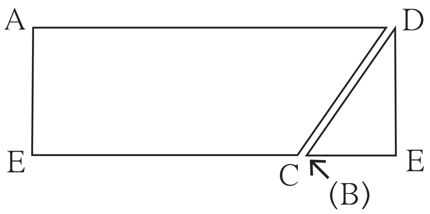
(4) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

**आओ जानें**

## समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a parallelogram)

**कृति :**



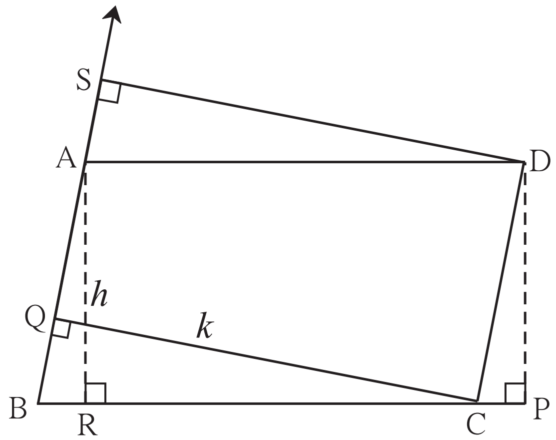




- किसी कागज पर एक बड़ा समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए, बिंदु A से भुजा BC पर लंब खींचिए $\Delta$ AEB यह समकोण त्रिभुज काटिए उसे सरकाते हुए दूसरी आकृति में दर्शाएनुसार □ ABCD के शेषभाग को जोड़कर रखो । ध्यान दो कि बनी हुई आकृति आयत है ।
- समांतर चतुर्भुज से यह आयत बना हुआ है इसलिए दोनों के क्षेत्रफल समान है ।
- समांतर चतुर्भुज का आधार अर्थात आयत की एक भुजा (लंबाई) तथा उसकी ऊँचाई अर्थात आयत की दूसरी भुजा (चौड़ाई) है ।

**∴ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई**

ध्यान दे कि, समांतर चतुर्भुज की समांतर भुजाओं में से एक भुजा को आधार माना हो तब उन समांतर भुजाओं के मध्य की दूरी ही उस चतुर्भुज के आधार की संगत ऊँचाई होती है ।

□ ABCD यह समांतर चतुर्भुज है ।




रेख DP ⊥ भुजा BC, रेख AR ⊥ भुजा BC । यदि भुजा BC आधार माना गया तब ऊँचाई =

$$l(AR) = l(DP) = h \text{ ।}$$

यदि रेख CQ ⊥ भुजा AB हो और यदि AB इस भुजा को आधार माना गया तब उस आधार की संगत ऊँचाई $l(QC) = k$ है ।

∴ A(□ ABCD) = $l(BC) \times h = l(AB) \times k$.

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** एक समांतर चतुर्भुज का आधार 8 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी हो तब उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

**हल** : समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = 8 × 5

= 40

∴ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 40 वर्ग सेमी

**उदा. (2)** एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 112 वर्ग सेमी हो और उसका आधार 10 सेमी हो तब उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

**हल** : समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई ∴ 112 = 10 × ऊँचाई

$$\frac{112}{10} = \text{ऊँचाई}$$

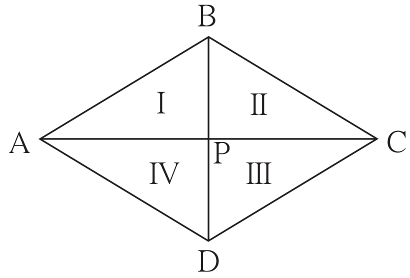
∴ समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 11.2 सेमी

## प्रश्नसंग्रह 15.1

1. एक समांतर चतुर्भुज का आधार 18 सेमी तथा ऊँचाई 11 सेमी है तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 29.6 व.सेमी और आधार 8 सेमी है तो उस चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।
3. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 83.2 व.सेमी है और उसकी ऊँचाई 6.4 सेमी हो तब उसके आधार की लंबाई कितनी होगी ?

**समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a rhombus)**

**कृति :** आकृति में दिखाए अनुसार एक समचतुर्भुज खींचो । आप जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजक होते हैं ।




माना $l(AC) = d_1$ और $l(BD) = d_2$

□ABCD यह समचतुर्भुज है उसके विकर्ण बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं इसलिए हमें चार सर्वांगसम समकोण त्रिभुज प्राप्त होते हैं प्रत्येक समकोण त्रिभुज की भुजा $\frac{1}{2}\ l(AC)$ तथा $\frac{1}{2}\ l(BD)$ है ।

$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2}\ l(AC) = \frac{d_1}{2}$,

इसी प्रकार $l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2}\ l(BD) = \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 4 \times A(\Delta\ APB)$

$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$

$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$

$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

**$\therefore$ समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों की लंबाइयों का गुणनफल**

## हल किए गए उदाहरण

**उदा.(1)** एक समचतुर्भुज के दो विकर्णों की लंबाइयाँ क्रमश: 11.2 सेमी तथा 7.5 सेमी हो तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

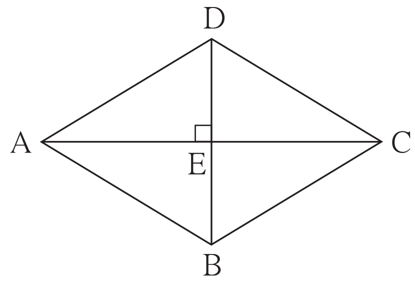
**हल** : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों की लंबाइयों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} \qquad = 5.6 \times 7.5$

= 42 वर्ग सेमी.

**उदा.(2)** किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 96 व.सेमी है । यदि उसके एक विकर्ण की लंबाई 12 सेमी हो तो उस चतुर्भुज की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना, □ABCD यह समचतुर्भुज है उसके विकर्ण BD की लंबाई 12 सेमी है उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल 96 व. सेमी है इससे सर्वप्रथम कर्ण AC की लंबाई ज्ञात करेंगे ।




समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों की लंबाइयों का गुणनफल

$$\therefore\ 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore\ l(AC) = 16$$

माना विकर्णो के प्रतिच्छेदन बिंदु E है । समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore\ \Delta$ ADE में, $m\angle E = 90°$,

$l(DE) = \frac{1}{2} l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6$; | $l(AE) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$

पाइथागोरस के प्रमेय से,

$$l(AD)^2 = l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2$$

$$= 64 + 36 = 100$$

$\therefore\ l(AD) = 10$

$\therefore$ समचतुर्भुज की भुजा 10 सेमी होगी ।

## प्रश्नसंग्रह 15.2

1. किसी समचतुर्भुज के विकर्णो की लंबाइयाँ 15 सेमी तथा 24 सेमी हो तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल कितना होगा ?

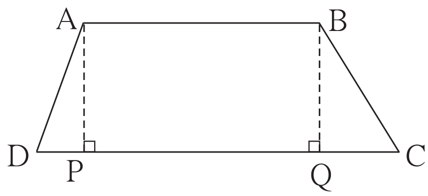
2. किसी समचतुर्भुज के दो विकर्णो की लंबाइयाँ क्रमश: 10.5 सेमी तथा 14.2 सेमी हो तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

3. किसी समचतुर्भुज की परिमिति 100 सेमी हो तथा उसके एक विकर्ण की लंबाई 48 सेमी हो तब उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल कितना होगा ?

4*. किसी एक समचतुर्भुज के विकर्ण की लंबाई 30 सेमी है तथा उसका क्षेत्रफल 240 व.सेमी तो उस समचतुर्भुज की परिमिति ज्ञात कीजिए ।

**समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a trapezium)**

**कृति :** एक कागज पर ऐसा समलंब चतुर्भुज □ABCD खींचो जिसमें रेख AB || रेख DC हो




रेख AP ⊥ भुजा DC और

रेख BQ ⊥ भुजा DC खींचिए

माना $l(AP) = l(BQ) = h$

समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई $h$, अर्थात समांतर रेखाओं के बीच की दूरी,

समलंब चतुर्भुज ABCD लंब खीचने के कारण समचतुर्भुज के 3 क्षेत्रों में विभाजित हुआ, इनमें Δ DPA तथा Δ BQC समकोण त्रिभुज है □ABQP यह एक आयत है । बिंदु P और बिंदु Q यह रेख DC पर स्थित है ।

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$= A(\Delta\ APD) + A(\square APQB) + A(\Delta BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2}\ l(QC) \times h$$

$$= h\ [\frac{1}{2}\ l(DP) + l(PQ) + \frac{1}{2}\ l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \ldots \because\ l(PQ) = l(AB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

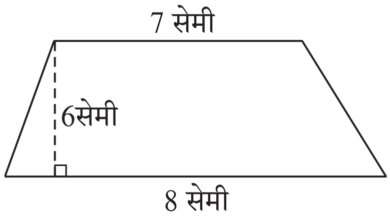
$$= \frac{1}{2} \times h\ [l(DC) + l(AB)]$$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}$ (समांतर रेखाओं की लंबाइयों का योगफल) $\times\ h$

$\therefore$ **समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल** $= \frac{1}{2} \times$ **समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योगफल** $\times$ **ऊँचाई**

## हल किए गए उदाहरण

**उदा.(1)** किसी समलंब चतुर्भुज की सम्मुख भुजा की एक जोड़ी परस्पर समांतर है । उन रेखाओं के बीच की दूरी 6 सेमी है तथा समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ क्रमश: 7 सेमी तथा 8 सेमी हो तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।



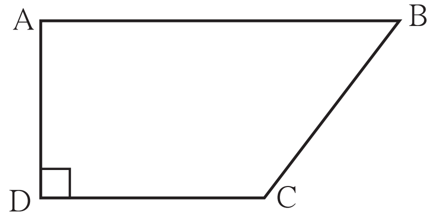
**हल** : समांतर रेखाओं के बीच की दूरी = समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई = 6 सेमी

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योगफल) × ऊँचाई

$= \frac{1}{2}(7 + 8) \times 6 = 45$ व. सेमी

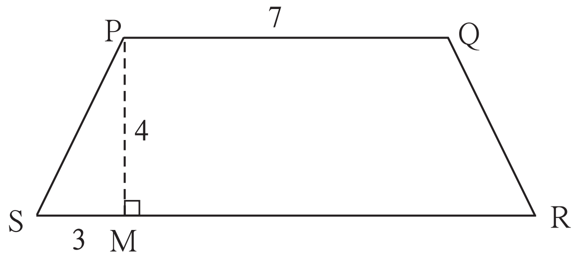
## प्रश्नसंग्रह 15.3

1. चतुर्भुज ABCD में $l$(AB) = 13 सेमी, $l$(DC) = 9 सेमी, $l$(AD) = 8 सेमी, चतुर्भुज का क्षेत्रफल □ ABCD ज्ञात कीजिए ।




2. किसी समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं की लंबाइयाँ 8.5 सेमी तथा 11.5 सेमी हैं उसकी ऊँचाई 4.2 सेमी हों तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

3★. □ PQRS यह समद्विबाहु समलंब चतुर्भुज है $l$(PQ) = 7 सेमी, रेख PM ⊥ भुजा SR, $l$(SM) = 3 सेमी, समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 4 सेमी है, तो □ PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

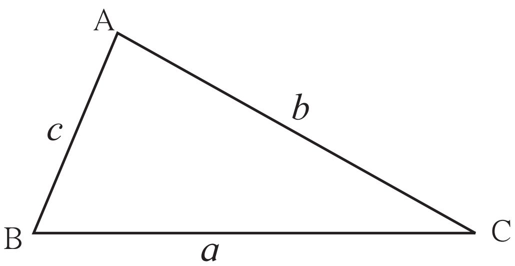



### आओ जानें

## त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई इसे हम जानते हैं ।

अब यदि किसी त्रिभुज मे ऊँचाई नहीं दी गई है किंतु त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई दी गई है तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करते हैं इसे देखेंगे ।




Δ ABC की भुजाओं की लंबाइयाँ $a$, $b$, $c$ हैं ।

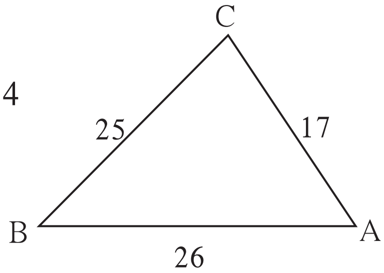
इस त्रिभुज की अर्धपरिमिति ज्ञात करेंगे ।

अर्धपरिमिति = $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

इस सूत्र को **हीरो का सूत्र** (Heron's Formula) कहते हैं ।

**उदा. (1)** किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ 17 सेमी, 25 सेमी तथा 26 सेमी है । उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।




**हल** : $a = 17, b = 25, c = 26$

अर्धपरिमिति $= s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+25+26}{2} = \frac{68}{2} = 34$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)}$

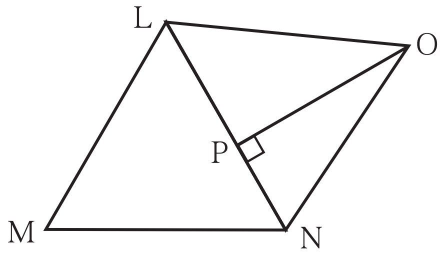
$= \sqrt{34\times17\times9\times8}$

$= \sqrt{17\times2\times17\times3\times3\times2\times2\times2}$

$= \sqrt{17^2\times2^2\times2^2\times3^2}$

$= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204$ व.सेमी

**उदा. (2)** किसी भूखंड की आकृति एवं उसका माप दिया गया है । $l$(LM) = 60 मी. $l$(MN) = 60 मी. $l$(LN) = 96 मी. $l$(OP) = 70 मी. भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।




**हल** : इस आकृति में Δ LMN तथा Δ LON बना हुआ दिखता है Δ LMN की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई हैं इसलिए हीरो के सूत्र का उपयोग करके उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । Δ LON में आधार भुजा LN तथा ऊँचाई भुजा $l$(OP) लेकर Δ LON का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Δ LMN की अर्धपरिमिति, $s = \frac{60+60+96}{2} = \frac{216}{2} = 108$ मी.

$\therefore$ Δ LMN का क्षेत्रफल $= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)}$

$= \sqrt{108\times48\times48\times12}$

$= \sqrt{12\times9\times48\times48\times12}$

A(Δ LMN) $= 12 \times 3 \times 48 = 1728$ व.मी.

A(Δ LNO) $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 96 \times 70$

$= 96 \times 35 = 3360$ व.मी

भूखंड LMNO का क्षेत्रफल = A(Δ LMN) + A(Δ LNO)

$= 1728 + 3360$

$= 5088$ व.मी.

## मैंने यह समझा

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों की लंबाइयों का गुणनफल

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योगफल × ऊँचाई

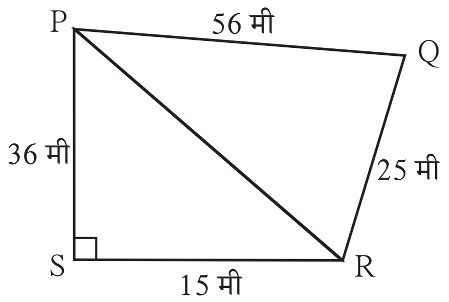
त्रिभुज ABC की भुजाओं की लंबाइयाँ यदि $a$, $b$, $c$ हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$A(\Delta\ ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$

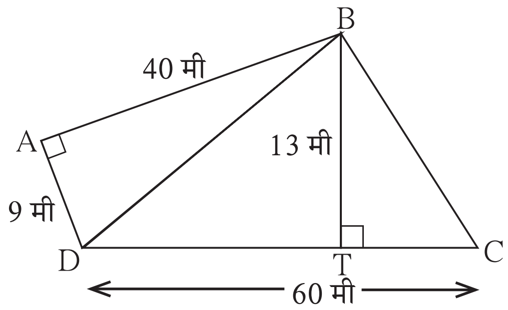
## प्रश्नसंग्रह 15.4

1. किसी त्रिभुज की भुजाएँ 45 सेमी, 39 सेमी तथा 42 सेमी है तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

2. संलग्न आकृति में दिए गए मापों को ध्यान में रखकर □ PQRS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।




3. संलग्न आकृति में कुछ माप दिखाए हैं इसके आधार पर □ ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

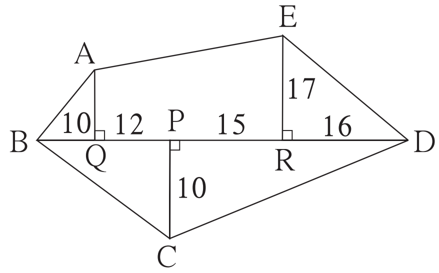



## आओ जानें

### अनियमित आकारों की जगह का क्षेत्रफल

भूखंड खेती की जमीन इनका आकार सामान्यत: अनियमित आकार का बहुभुज होता है इसका विभाजन त्रिभुज या विशिष्ट चतुर्भुज में किया जा सकता है । ऐसा विभाजन करके उनका क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करना है यह दिए गए उदाहरण से समझेंगे ।

**उदा.** संलग्न आकृति में ABCDE एक बहुभुजाकृति है आकृति में सभी माप मीटर में दिए गए हैं । इस बहुभुजाकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।




**हल** : $\Delta$ AQB, $\Delta$ ERD यह समकोण त्रिभुज है $\square$ AQRE यह समलंब चतुर्भुज है ।

$\Delta$ BCD का आधार BD एवं ऊँचाई PC दिया गया है । प्रत्येक आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

$$A(\Delta\ AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ व.मी}$$

$$A(\Delta\ ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ व.मी}$$

$$A(\square\ AQRE) = \frac{1}{2}\ [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR)$$

$$= \frac{1}{2}\ [13 + 17] \times (12 + 15)$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ व.मी}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ मी}$$

$$A(\Delta\ BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ व.मी}$$

$\therefore$ बहुभुजाकृति ABCDE का क्षेत्रफल

$= A(\Delta\ AQB) + A(\square AQRE) + A(\Delta\ ERD) + A(\Delta\ BCD)$

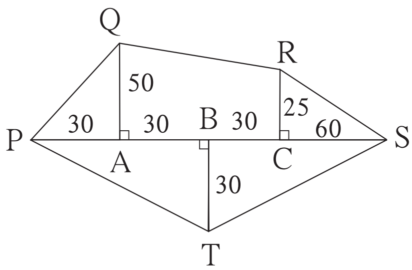
$= 65 + 405 + 136 + 265$

$= 871$ व.मी

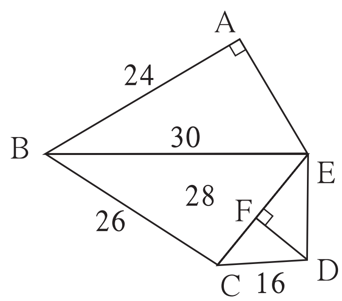
## प्रश्नसंग्रह 15.5

1. निम्न भूखंडों के मानचित्र के आधार पर उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (सभी माप मीटर में हैं ।)

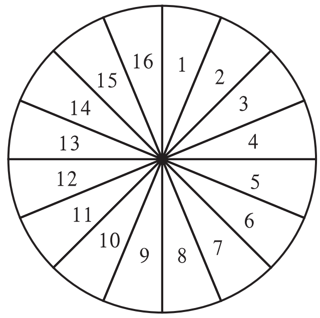
(1)



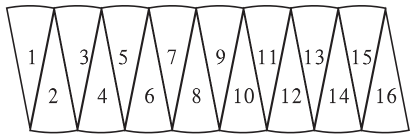

(2)



**वृत्त का क्षेत्रफल (Area of a circle)**




**कृति :** किसी एक मोटे कागज पर एक वृत्त खींचिए वृत्ताकार भाग को काटकर अलग कीजिए। उसके व्यास बना कर उसके 16 या 32 समान भाग में विभाजित कीजिए या 360° के समान भाग कर वृत्त के 18 या 20 समान भाग करो । उसके पश्चात वह भाग त्रिज्या पर काटकर अलग-अलग पंखुड़ियाँ प्राप्त कीजिए । आकृति में दिखाए अनुसार उसे मिलाइए । हमें करीब-करीब एक आयत प्राप्त होता दिखाई देता है । वृत्त के समान भागों की संख्या बढ़ाने पर प्राप्त नई आकृति अधिकाधिक आयताकार होगी ।




वृत्त की परीधि = $2\pi r$

$\therefore$ आयत की लंबाई $\pi r$, अर्थात अर्धपरिमिति के बराबर है उसकी चौड़ाई $r$ है ।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई = $\pi r \times r = \pi r^2$

## हल किए गए उदाहरण

**उदा.(1)** एक वृत्त की त्रिज्या 21 सेमी हो तो उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

**हल :** वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} \quad = 66 \times 21 \quad = 1386 \text{ वर्ग सेमी}$$

**उदा.(2)** एक वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल 3850 वर्ग मी है, तो उस मैदान की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

**हल :** वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2$

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 1225$$

$$r = 35 \text{ मी.}$$

$\therefore$ मैदान की त्रिज्या 35 मी है ।

## प्रश्नसंग्रह 15.6

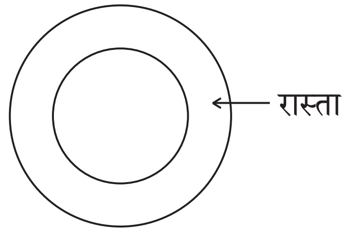
1. वृत्तों की त्रिज्याएँ दी गई हैं उस वृत्तों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

   (1) 28 सेमी (2) 10.5 सेमी (3) 17.5 सेमी

2. नीचे कुछ वृत्तों के क्षेत्रफल दिए गए हैं । तो उस वृत्त के व्यास ज्ञात कीजिए ।

   (1) 176 वर्ग सेमी (2) 394.24 वर्ग सेमी (3) 12474 वर्ग सेमी

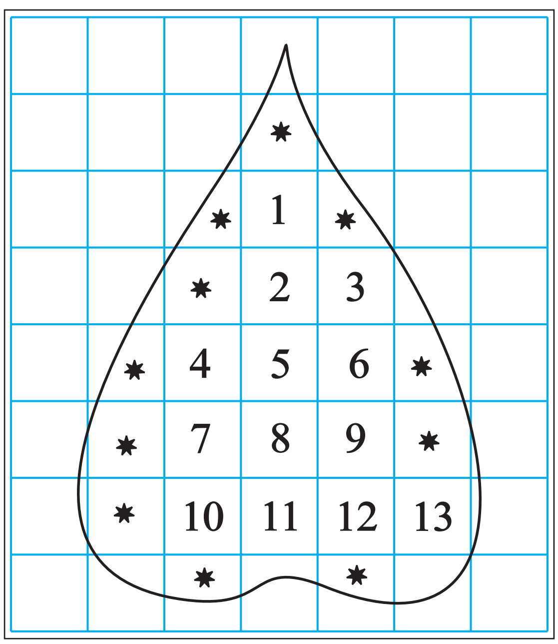
3. किसी वृत्ताकार बगीचे का व्यास 42 मी. है उसके बाहरी ओर से 3.5 मी. चौड़ाई का रास्ता है, तो उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।




4. एक वृत्त की परिधि 88 सेमी है तो उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

**अनियमित आकारवाली आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करना :**

आलेख की सहायता से बंद आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं । दी गई आकृति या वस्तु का कोई पृष्ठ आलेख पर रखकर उसके बाहरी ओर से पेन्सिल घुमाओ आलेख पर बनी इस आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्गों की संख्या गिनना तथा क्षेत्रफल ज्ञात करना निम्नलिखित आकृति से समझिए ।




(1) आकृति में 1 व.सेमी क्षेत्रफलवाला पूर्ण वर्गों की संख्या = 13

$\therefore$ उसका क्षेत्रफल 13 व.सेमी.

(2) आकृति में $\frac{1}{2}$ व.सेमी से अधिक किंतु 1 व.सेमी से कम क्षेत्रफलवाले भागों की संख्या = 11

$\therefore$ उसका क्षेत्रफल = लगभग 11 व.सेमी

(3) आकृति में $\frac{1}{2}$ व.सेमी क्षेत्रफलवाले भागों की संख्या = 0

$\therefore$ उसका क्षेत्रफल = 0 व.सेमी

(4) आकृति में $\frac{1}{2}$ व.सेमी से कम क्षेत्रफलवाले भागों का क्षेत्रफल का विचार नहीं करना ।

$\therefore$ उसका कुल क्षेत्रफल = 0 व.सेमी

$\therefore$ दी गई आकृति का अनुमानित क्षेत्रफल

= 13 + 11 + 0 + 0 = 24 व.सेमी

इस प्रकार दी गई आकृति में मापने के लिए वर्ग जितने छोटे आकार के होंगे उतना अंदाज बराबर होगा ।

**कृति :** आलेख कॉपी में 28 मि.मी त्रिज्या का एक वृत्त, कोई एक त्रिभुज, एक समलंब चतुर्भुज बनाइए । इन तीनों आकृतियों के क्षेत्रफल आलेख कॉपी में छोटे वर्ग गिनकर ज्ञात करो । उसे सूत्र के द्‌वारा प्राप्त होने वाले क्षेत्रफल से जाँचकर देखिए ।

**अधिक जानकारी हेतु :**

हमारे देश में मापन के लिए दशमलव पद्‌धति अपनाई है । सरकारी दस्तावेज में जमीन का क्षेत्रफल, आर, हेक्टर, इस दशमलव इकाई में दर्ज होता है ।

100 व.मी = 1 आर, 100 आर = 1 हेक्टर = 10,000 व.मी

व्यवहार में सिर्फ जमीन का क्षेत्रफल गुंठा, एकड़ इन इकाइयों में मापन प्रचलित है । गुंठा यह क्षेत्रफल 1 आर अर्थात लगभग 100 व.मी होता है । एकड़ क्षेत्रफल लगभग 0.4 हेक्टर होता है ।

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 15.1** 1. 198 व.सेमी 2. 3.7 सेमी 3. 13 सेमी

**प्रश्नसंग्रह 15.2** 1. 180 व.सेमी 2. 117.15 व.सेमी 3. 336 व.सेमी 4. 68 सेमी

**प्रश्नसंग्रह 15.3** 1. 88 व.सेमी 2. 42 सेमी 3. 40 व.सेमी

**प्रश्नसंग्रह 15.4** 1. 756 व.सेमी 2. 690 व.सेमी 3. 570 व.सेमी

**प्रश्नसंग्रह 15.5** 1. 6000 व.मी 2. 776 व.मी

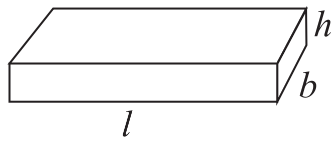
**प्रश्नसंग्रह 15.6** 1. (1) 2464 व.सेमी (2) 346.5 व.सेमी (3) 962.5 व.सेमी 2. (1) $2\sqrt{56}$ सेमी (2) 22.4 सेमी (3) 126 सेमी 3. 500.50 व.मी 4. 616 व.सेमी

CRCZBE

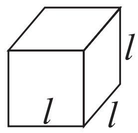
# 16 पृष्ठफल एवं घनफल

**थोड़ा याद करें**

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$




समघन (घन) का संपूर्ण पृष्ठफल = $6l^2$




1 मी = 100 सेमी      1 वर्ग मी = $100 \times 100$ वर्ग सेमी = 10000 वर्ग सेमी = $10^4$ वर्ग सेमी

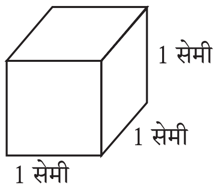
1 सेमी = 10 मिमी      1 वर्ग सेमी= $10 \times 10$ वर्ग मिमी = 100 वर्ग मिमी = $10^2$ वर्ग मिमी

**आओ जानें**

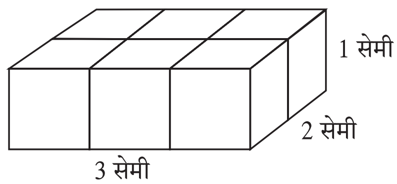
घनाभ, समघन और लंब वृत्ताकार बेलन यह त्रिमितीय आकार अर्थात घनाकृति होते हैं । यह घनाकृति अवकाश में जगह घेरती है । **किसी भी घनाकृति द्‌वारा अवकाश में घिरी हुई जगह का माप अर्थात घनाकृति का घनफल होता है ।**

## घनफल की प्रामाणिक इकाई (Standard unit of volume)

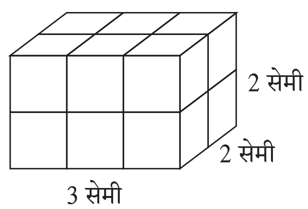
आकृति 16.3 में घन की प्रत्येक भुजा 1 सेमी है । इस घन द्‌वारा घिरा स्थान, घनफल मापन की एक प्रामाणिक इकाई है । इसे 1 घनसेंटीमीटर, संक्षेप में 1 घसेमी या 1 सेमी $^3$ लिखते हैं ।




**कृति I :** प्रत्येक भुजा 1 सेमी हो ऐसे कई घन मिलाइए । आकृति में दर्शाए अनुसार 6 घन एक दूसरे से सटाकर रखो । एक घनाभ बनेगा । इस घनाभ की लंबाई 3 सेमी, चौड़ाई 2 सेमी तथा ऊँचाई 1 सेमी है । 1 सेमी भुजावाले 6 घन मिलाकर यह घनाभ बनता है । इसका घनफल $3 \times 2 \times 1 = 6$ घसेमी है इसे ध्यान में रखिए ।



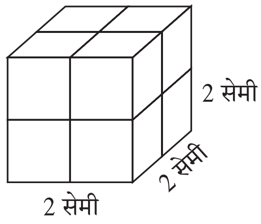

**कृति II :** संलग्न घनाभ की लंबाई 3 सेमी, चौड़ाई 2 सेमी तथा ऊँचाई 2 सेमी है । इस घनाभ में 1 घसेमी घनफलवाले $3 \times 2 \times 2 = 12$ घन हैं । इसलिए इस घनाभ का घनफल 12 घसेमी है । इस प्रकार




घनाभ का घनफल = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई यह सूत्र प्राप्त होता है ।

लंबाई के लिए $l$ चौड़ाई के लिए $b$ और ऊँचाई के लिए $h$ अक्षर लेने पर **घनाभ का घनफल = $l \times b \times h$**

**कृति III :**

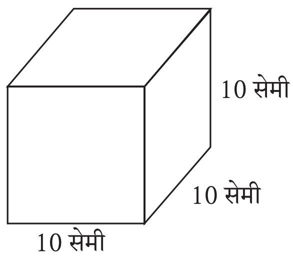



संलग्न आकृति में 1 घसेमी घनफलवाले 8 घन एक दूसरे से सटाकर रखे हैं इससे प्राप्त घनाकृति 2 सेमी भुजा वाला घन है ।

इस घन का घनफल = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ ध्यान में रखें ।

इस आधार पर घन की भुजा $l$ हो तो **घन का घनफल =** $l \times l \times l = l^3$ **होता है ।**

**द्रव का घनफल :** द्रव की धारिता अर्थात द्रव का घनफल 1 द्रव की धारिता मापने के लिए मिली लीटर और लीटर इकाई का प्रयोग करते हैं, यह हमें ज्ञात है ।




संलग्न आकृति में 10 सेमी भुजावाला एक खोखला घन है । इसका घनफल $10 \times 10 \times 10 = 1000$ घसेमी है । यह घन पानी से भरा तो इस पानी की धारिता अर्थात घनफल 1000 घसेमी होगी । इस धारिता को ही एक लीटर कहते हैं ।

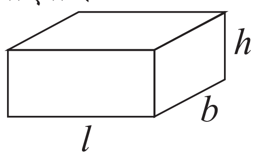
$\therefore$ 1 लीटर = 1000 मिली, यह हमें ज्ञात है ।

$\therefore$ 1 लीटर = 1000 घसेमी = 1000 मिली, इस प्रकार 1 घसेमी = 1 मिली इसे भी ध्यान में रखो ।

अर्थात 1 सेमी भुजावाले घनाभ में समाविष्ट पानी की धारिता 1 मिली होती है ।

## हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** घनाभ के आकार का, मछलियाँ रखने वाले काँच की पेटी की लंबाई 1 मीटर, चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 50 सेमी हो तो ज्ञात कीजिए कि उसमें कितने लीटर पानी भरा जाएगा ।




**हल :** पेटी में भरे जाने वाले पानी का घनफल उस पेटी के घनफल के बराबर होता है । 1 मीटर = 100 सेमी, चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 50 सेमी है ।

पेटी का घनफल = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50$ = 200000 घसेमी,

$$200000 \text{ घसेमी} = \frac{200000}{1000} = 200 \text{ ली. } (\because 1000 \text{ घसेमी} = 1 \text{ ली})$$

$\therefore$ टंकी में 200 लीटर पानी भरा जाएगा ।

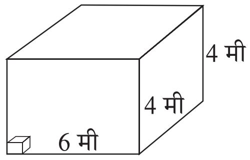
**उदा. (2)** किसी घनाभ आकारवाले गोदाम की लंबाई 6 मी, चौड़ाई 4 मी और ऊँचाई 4 मी है । इस गोदाम में 40 सेमी भुजावाले अधिक-से-अधिक कितने समघनाकार बक्से रखे जा सकेंगे ?

**हल :** रखे गए बक्सों से गोदाम पूरा भरने पर सभी डिब्बों का कुल घनफल गोदाम के घनफल के बराबर होगा । उदाहरण हल करने के लिए अगले चरण (सोपान) का विचार करेंगे ।

(1) गोदाम का घनफल ज्ञात करेंगे ।

(2) एक बक्से का घनफल ज्ञात करेंगे ।

(3) बक्से कि संख्या ज्ञात करेंगे ।




सोपान (1) : गोदाम की लंबाई 6 मी = 600 सेमी, चौड़ाई = ऊँचाई = 4 मी = 400 सेमी

गोदाम का घनफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई = $600 \times 400 \times 400$ घसेमी

सोपान (2) : एक बक्से का घनफल = भुजा$^3$ = $(40)^3$ = $40 \times 40 \times 40$ घसेमी

सोपन (3) : बक्से की संख्या = $\dfrac{\text{गोदाम का घनफल}}{\text{एक बॉक्स का घनफल}} = \dfrac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ उस गोदाम में अधिक-से-अधिक 1500 बक्से रखे जा सकेंगे ।

**उदा. (3)** बर्फी बनाने के लिए खोया (मावा) तथा शक्कर को गलाकर 5 लीटर मिश्रण घनाभ के आकार के ट्रे में डालने पर वह पूर्णत: भरता हैं । ट्रे की चौड़ाई 40 सेमी तथा ऊँचाई 2.5 सेमी हो तो उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**हल:** उदाहरण हल करने के लिए निम्नलिखित चौखट में योग्य संख्या लिखिए ।

सोपान (1) : ट्रे की धारिता = 5 लीटर = $\square$ घनसेमी ($\because$ 1 ली = 1000 घसेमी)

सोपान (2) : मिश्रण का घनफल = $\square$ घनसेमी

सोपान (3) : आयताकार ट्रे का घनफल = मिश्रण का घनफल

लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई = $\square$ घनसेमी

लांबी $\times 40 \times 2.5$ = $\square$ घनसेमी, $\therefore$ ट्रे की लंबाई = $\dfrac{\square}{100}$ = 50 सेमी

**मैंने यह समझा**

- घनाभ का घनफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई = $l \times b \times h$
- समघन का घनफल = भुजा$^3$ = $l^3$

## प्रश्नसंग्रह 16.1

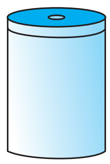
1. किसी बक्से की लंबाई 20 सेमी, चौड़ाई 10.5 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका घनफल ज्ञात कीजिए ।
2. किसी घनाभ के आकार के साबुन का घनफल 150 घसेमी है । उसकी लंबाई 10 सेमी तथा चौड़ाई 5 सेमी हो तो उसकी मोटाई कितनी होगी ?
3. 6 मीटर लंबी, 2.5 मी ऊँची तथा 0.5 मी चौड़ी दीवार बनाने के लिए 25 सेमी लंबी, 15 सेमी चौड़ी तथा 10 सेमी ऊँचाई वाली कितनी ईंटें लगेंगी ?

4. बारिश का पानी जमा करने के लिए किसी मुहल्ले में 10 मी लंबी, 6 मी चौड़ी तथा 3 मी गहरी पानी की टंकी बनाई गई है । उस टंकी की धारिता कितनी है ? टंकी में कितने लीटर पानी भरा जा सकेगा ?

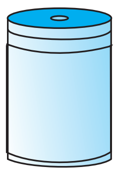
### आओ जानें

## लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल (Surface area of a cylinder)

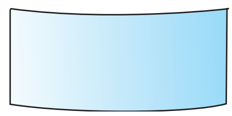
लंब वृत्ताकार बेलन के आकार का डिब्बा लीजिए । उसकी ऊँचाई के बराबर चौड़ाई वाला एक आयताकार कागज लीजिए । उस डिब्बे के चारों ओर कागज को ऐसा लपेटें कि उसका वक्रपृष्ठभाग पूरी तरह से ढँक जाएँ । कागज का बचा हुआ भाग काटकर अलग कर लीजिए ।



डिब्बा



कागज से लपेटा हुआ डिब्बा



वृत्त की परिधि = लंबाई

लपेटा हुआ कागज अलग कीजिए । वह आयताकार दिखेगा । इस आयत का क्षेत्रफल अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल ।

आयत की लंबाई अर्थात वृत्त के आधार की परिधि तथा आयत की चौड़ाई अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई होती है ।

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

= लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की परिधि $\times$ बेलन की ऊँचाई

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi r \times h = 2\pi rh$

बंद लंब वृत्ताकार बेलन के आधार का पृष्ठ और ऊपर का पृष्ठ वृत्ताकार होता है ।

$\therefore$ बंद लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल =

व्रकपृष्ठफल + ऊपरी पृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$\therefore$ लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल + 2 $\times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

### हल किए गए उदाहरण

**उदा. (1)** किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी के टंकी का व्यास 1 मी और ऊँचाई 2 मीटर है । टंकी पर ढक्कन लगा हुआ है । ढक्कन सहित टंकी के भीतर तथा बाहर रंग लगवाना है । रंग का खर्च 80 रुपये प्रति वर्ग मी हो तो टंकी को रंगवाने के लिए कितना खर्च आएगा? ( $\pi = 3.14$)

**हल :** टंकी के भीतर तथा बाहर रंग लगाना है । अर्थात रंग लगाने वाले भाग का क्षेत्रफल टंकी के संपूर्ण बाह्य पृष्ठफल का दुगुना है ।

लंब वृत्ताकार बेलन के आधार का व्यास 1 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या 0.5 मी और लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई 2 मी है।

$\therefore$ लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल $= 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ वर्ग मी

$\therefore$ रंग लगाने वाले भाग का क्षेत्रफल $= 2 \times 7.85 = 15.70$ व.मी

$\therefore$ टंकी को रंगवाने का कुल खर्च $= 15.70 \times 80 = 1256$ रुपये।

**उदा. (2)** जस्ते के किसी आयताकार पत्तरे की लंबाई 3.3 मी तथा चौड़ाई 3 मी है। इस पत्तरे से 3.5 सेमी त्रिज्या और 30 सेमी लंबाईवाले अधिक-से-अधिक कितनी नलिकाएँ बनेंगी ?

**हलः** आयताकार पत्तरे का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई

$= 3.3 \times 3$ वर्ग मी $= 330 \times 300$ वर्ग सेमी

नलिका की लंबाई अर्थात लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई $= h = 30$ सेमी

नलिका की त्रिज्या = लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या $= r = 3.5$ सेमी,

एक नलिका बनाने के लिए लगने वाला पत्तरा = एक नलिका का वक्रपृष्ठफल

$$= 2\pi rh = 2\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{10}\times\frac{30}{1}$$

$= 2 \times 22 \times 15 = 660$ वर्ग सेमी.

पत्तरे से बने नलिका की संख्या $= \dfrac{\text{पत्तरे का क्षेत्रफल}}{\text{एक नलिका का वक्रपृष्ठफल}} = \dfrac{330\times300}{660} = 150$

## प्रश्नसंग्रह 16.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में लंबवृतत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या $r$ तथा ऊँचाई $h$ दी गई है ; इनके आधार पर लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल तथा संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए।

   (1) $r = 7$ सेमी, $h = 10$ सेमी (2) $r = 1.4$ सेमी, $h = 2.1$ सेमी (3) $r = 2.5$ सेमी, $h = 7$ सेमी

   (4) $r = 70$ सेमी, $h = 1.4$ सेमी (5) $r = 4.2$ सेमी, $h = 14$ सेमी

2. दोनों ओर से बंद एक टंकी का व्यास 50 सेमी तथा ऊँचाई 45 सेमी है तो इस टंकी का संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात कीजिए। $(\pi = 3.14)$

3. किसी लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल 660 वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 21 सेमी है तो उसकी त्रिज्या तथा आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

4. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आकार के पत्तरे के डिब्बे का व्यास 28 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 20 सेमी है । यदि लंबवृत्ताकार बेलन का एक सिरा खुला हो तो उसके लिए लगने वाले पत्तरे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । उस डिब्बे का 2 सेमी ऊँचाई वाला ढक्कन बनाने के लिए लगभग कितने वर्ग सेमी पत्तरा लगेगा ज्ञात कीजिए ।

### आओ जानें

## लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल (Volume of a cylinder)

लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाली पानी की टंकी में कितना पानी आएगा इसे ज्ञात करने के लिए उस टंकी का घनफल निकालना पड़ता है ।

किसी भी लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई, यह सामान्य सूत्र है ।

लंब वृत्ताकार बेलन का आधार वृत्ताकार होता है । लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$

### हल किए गए उदाहरण

**उदा (1)** किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 10 सेमी हो तो उस लंबवृत्ताकार बेलन का घनफल ज्ञात कीजिए । ($\pi = 3.14$)

**हल :** लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या $r = 5$ सेमी और ऊँचाई $h = 10$ सेमी

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ घसेमी.

**उदा. (2)** किसी लंबवृत्ताकार बेलन के आकारवाले टंकी की ऊँचाई 56 सेमी है । उस टंकी की धारिता 70.4 लीटर हो तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए । ($\pi = \frac{22}{7}$)

**हल :** माना वृत्ताकार टंकी के आधार की त्रिज्या = r

टंकी में भरे पानी का घनफल = 70.4 लीटर

टंकी की धारिता = टंकी का घनफल = 70.4 × 1000 घसेमी = 704 × 100 घसेमी

1 ली = 1000 मिली $\therefore$ 70.4 ली = 70400 मिली

$\therefore$ टंकी का घनफल = $\pi r^2 h = 70400$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

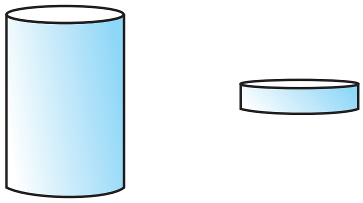
$\therefore r = 20$, $\therefore$ टंकी की त्रिज्या 20 सेमी है ।

**उदा. (3)** ताँबे के ठोस लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या 4.2 सेमी तथा ऊँचाई 16 सेमी है । इसे पिघलाकर 1.4 सेमी व्यास तथा 0.2 सेमी मोटी कितनी चकतियाँ बनेंगी ?

**हल :** लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या = R = 4.2 सेमी  ऊँचाई = H = 16 सेमी

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$

चकती के आधार की त्रिज्या = $1.4 \div 2 = 0.7$ सेमी



चकती की मोटाई = लंब वृत्ताकार बेलन की ऊँचाई = 0.2 सेमी

चकती का घनफल = $\pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

माना पिघलाए गए लंब वृत्ताकार बेलन से $n$ चकतियाँ बनेंगी ।

$\therefore$ $n \times$ एक चकती का घनफल = लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल

$$n = \frac{\text{लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल}}{\text{एक चकती का घनफल}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 चकतियाँ बनेंगी ।

**मैंने यह समझा**

लंब वृत्ताकार बेलन का वक्रपृष्ठफल = $2\pi rh$   लंब वृत्ताकार बेलन का संपूर्ण पृष्ठफल = $2\pi r(h + r)$

लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल = $\pi r^2 h$

## प्रश्नसंग्रह 16.3

1. नीचे लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की त्रिज्या ($r$) तथा ऊँचाई ($h$) दी गई है । इस आधार पर लंब वृत्ताकार बेलन का घनफल ज्ञात कीजिए ।

   (1) $r$ =10.5 सेमी, $h$ = 8 सेमी    (2) $r$ = 2.5 मी, $h$ = 7 मी

   (3) $r$ = 4.2 सेमी, $h$ = 5 सेमी    (4) $r$ = 5.6 सेमी, $h$ = 5 सेमी

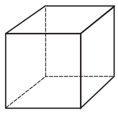
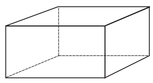
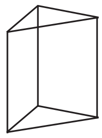
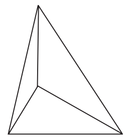
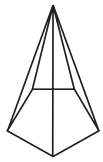
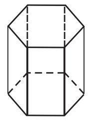
2. 90 सेमी लंबाई तथा 1.4 सेमी व्यासवाले लोहे की सरिया बनाने में लगने वाले लोहे का घनफल ज्ञात कीजिए ।

3. लंब वृत्ताकार बेलन के आकारवाले किसी हौज का आंतरिक व्यास 1.6 मी तथा उसकी गहराई 0.7 मी है । उस हौज में अधिक-से-अधिक कितना पानी भरा जा सकता है ?

4. किसी लंब वृत्ताकार बेलन के आधार की परिधि 132 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 25 सेमी हो तो उसका घनफल कितना होगा ?

**ऑयलर का सूत्र :**

पृष्ठ (F), शीर्षबिंदु (V), और कोर (E) वाले घनाकृति के संबंध में एक मनोरंजक सूत्र लिओनार्ड ऑयलर नाम के एक महान वैज्ञानिक ने अत्यंत छोटी उम्र में ही खोजा था । निम्नलिखित सारणी में दिए गए प्रत्येक आकृति के पृष्ठ, कोरें तथा शीर्षबिंदुओं की संख्या लिखकर सारणी पूर्ण कीजिए और इस आधार पर $F + V = E + 2$ ऑयलर के सूत्र की जाँच कीजिए ।

| नाम | घन | घनाभ | त्रिभुजाकार प्रिज्म | त्रिभुजाकार पिरामिड | पंचभुजाकार पिरामिड | षटभुजाकार प्रिज्म |
|---|---|---|---|---|---|---|
| आकार |  |  |  |  |  |  |
| पृष्ठ (F) | 6 | | | | | 8 |
| शीर्षबिंदु (V) | 8 | | | | | 12 |
| कोरे (E) | | 12 | | | 10 | |

## उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 16.1**

**1.** 1680 घसेमी **2.** 3 सेमी **3.** 2000 ईंटें **4.** 1,80,000 ली.

**प्रश्नसंग्रह 16.2**

**1.** (1) 440 वर्ग सेमी, 748 वर्ग सेमी (2) 18.48 वर्ग सेमी, 30.80 वर्ग सेमी

(3) 110 वर्ग सेमी, 149.29 वर्ग सेमी (4) 616 वर्ग सेमी, 31416 वर्ग सेमी

(5) 369.60 वर्ग सेमी, 480.48 वर्ग सेमी

**2.** 10,990 वर्ग सेमी 3. 5 सेमी, 78.50 वर्ग सेमी

**4.** 2376 वर्ग सेमी, ढक्कन के लिए लगभग 792 वर्ग सेमी पत्तरा लगेगा ।

**प्रश्नसंग्रह 16.3**

**1.** (1) 2772 घसेमी (2) 137.5 घमी (3) 277.2 घसेमी

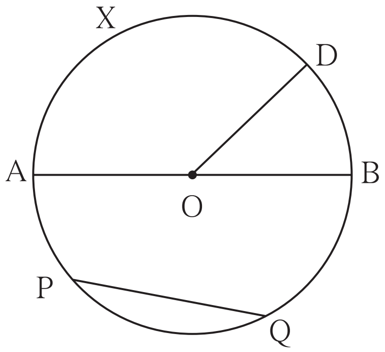
(4) 492.8 घसेमी

**2.** 138.6 घसेमी **3.** 1408 ली **4.** 34650 घसेमी

CZCR5J

# 17 वृत्त – जीवा एवं चाप

## थोड़ा याद करें




संलग्न आकृति में बिंदु O वृत्त का केंद्र है ।

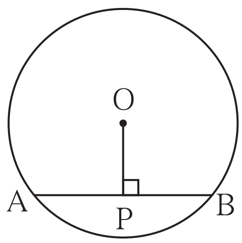
आकृति से संबंधित निम्नलिखित कथनों में खाली जगह भरिए ।

- रेख OD वृत्त की .......... है ।
- रेख AB वृत्त का .......... है ।
- रेख PQ वृत्त की .......... है ।
- .......... केंद्रीय कोण है ।
- लघुचाप : चाप AXD, चाप BD, ....., ....., .....
- दीर्घचाप : चाप PAB, चाप PDQ, .....
- अर्धवृत्त का चाप : चाप ADB, .....
- $m$(चाप DB) = m∠.......
- $m$(चाप DAB) = $360°$ – m∠.......

## आओ जानें

### वृत्त की जीवा का गुणधर्म (Properties of chord of a circle)

**कृति I :**




O केंद्रवाले वृत्त की रेख AB जीवा खींचिए ।

केंद्र O से जीवा AB पर रेख OP लंब खींचिए ।

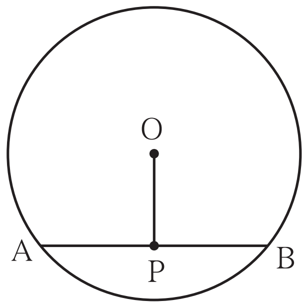
रेख AP तथा रेख PB की लंबाई नापिए ।

इस प्रकार भिन्न-भिन्न त्रिज्या के पाँच वृत्त कागज पर खींचिए । प्रत्येक वृत्त में एक जीवा खींचकर उस जीवा पर केंद्र से लंब खींचिए । जीवा के बने दोनों भाग समान हैं क्या ? विभाजक की सहायता से इनकी जाँच कीजिए ।

आपको निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होगा । इसका अनुभव करें ।

**वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है ।**

कृति II :



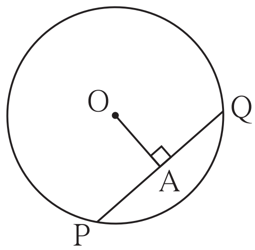

किसी कागज पर भिन्न-भिन्न त्रिज्यावाले 5 वृत्त खींचिए । प्रत्येक वृत्त में एक जीवा खींचिए । उस जीवा का मध्य बिंदु प्राप्त कीजिए । वृत्त केंद्र O को जीवा के मध्य बिंदु से मिलाइए । संलग्न आकृति में दर्शाएनुसार प्रत्येक जीवा को AB और जीवा के मध्यबिंदु को P नाम दीजिए । $\angle$ APO तथा $\angle$ BPO समकोण हैं यह गुनिया या कोणमापक से जाँच करके देखिए ।

यह अनुभव वृत्त की प्रत्येक जीवा से प्राप्त होता है इसे देखिए ।

इसके आधार पर आपको निम्नलिखित गुणधर्म प्राप्त होगा ।

**वृत्त के केंद्र से तथा वृत्त में स्थित जीवा के मध्यबिंदु को जोड़ने वाला रेखाखंड उस जीवा पर लंब होता है ।**

## हल किये गये उदाहरण




**उदा. (1)** O केंद्र वाले वृत्त में जीवा PQ की लंबाई 7 सेमी है । रेख OA $\perp$ जीवा PQ, तो $l$(AP) ज्ञात कीजिए ।

**हल** : रेख OA $\perp$ जीवा PQ, $\therefore$ बिंदु A जीवा PQ का मध्यबिंदु है ।

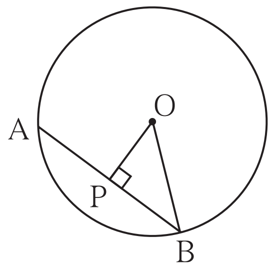
$\therefore\ l(PA) = \frac{1}{2}\ l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5$ सेमी

**उदा. (2)** 'O' केंद्रवाले किसी वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है । उस वृत्त की एक जीवा केंद्र से 6 सेमी की दूरी पर है, तो उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

**हल** : वृत्त की जीवा से केंद्र की दूरी अर्थात केंद्र से उस जीवा पर खींची गई लंब रेखाखंड की लंबाई ।

रेख AB यह 'O' केंद्र वाले वृत्त की जीवा है ।

रेख OP $\perp$ जीवा AB ।




वृत्त की त्रिज्या = $l$(OB) = 10 सेमी ।

$l$(OP) = 6 सेमी । यहाँ समकोण $\Delta$ OPB तैयार होता है ।

पाइथागोरस के प्रमेय अनुसार,

$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$

$\therefore\ 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$

$\therefore\ [l(PB)]^2 = (10 + 6)\ (10 - 6) = 16 \times 4 = 64$

$\therefore\ l(PB) = 8$ सेमी

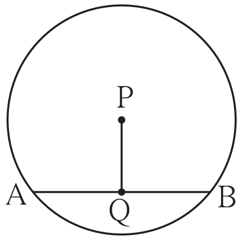
हम जानते हैं कि वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है ।

$\therefore\ l(AB) = 2l(PB) = 2 \times 8 = 16$

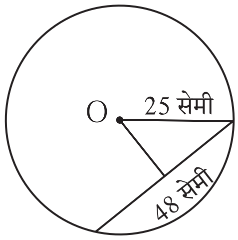
$\therefore$ जीवा AB की लंबाई 16 सेमी है ।

## प्रश्नसंग्रह 17.1

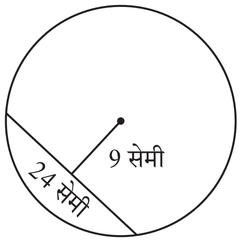
1. 'P' केंद्र वाले वृत्त में जीवा AB की लंबाई 13 सेमी है । रेख PQ $\perp$ जीवा AB तो $l$(QB) ज्ञात कीजिए ।




2. 'O' केंद्रवाले वृत्त की त्रिज्या 25 सेमी है । इस वृत्त में 48 सेमी लंबाईवाली एक जीवा खींची गई तो वृत्त केंद्र से वह कितनी दूरी पर होगी ?




3. O केंद्रवाले वृत्त की एक जीवा की लंबाई 24 सेमी है तथा वह वृत्त केंद्र से 9 सेमी दूरी पर है तो उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

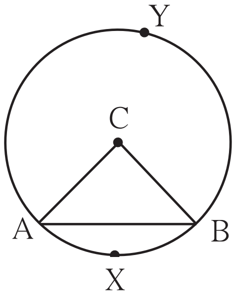



4. किसी वृत्त का केंद्र C तथा उसकी त्रिज्या 10 सेमी है । उस वृत्त के एक जीवा की लंबाई 12 सेमी हो तो वह जीवा केंद्र से कितनी दूरी पर होगी ?

**आओ जानें**

### वृत्त की जीवा के संगत चाप (Arcs corresponding to chord of a circle)

संलग्न आकृति में, रेख AB, O केंद्रवाले वृत्त की जीवा है । चाप AXB लघुचाप तथा चाप AYB दीर्घचाप है । इन दोनों चापों को जीवा AB के संगत चाप कहते हैं । इसके विपरित जीवा AB चाप AXB और चाप AYB की संगत जीवा है ।



## सर्वांगसम चाप (Congruent arcs)

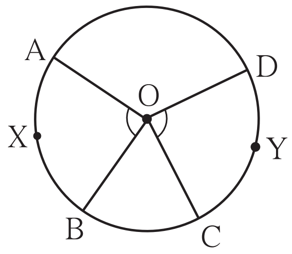
**यदि एक ही वृत्त के दो चापों के माप समान हों तो वे दोनों चाप सर्वांगसम होते हैं ।**

O केंद्रवाले वृत्त में

$\therefore$ $m\angle AOB = m\angle COD$

$\therefore$ $m$(चाप AXB) = $m$(चाप CYD)

$\therefore$ चाप AXB $\cong$ चाप CYD इसे ट्रेसिंग पेपर की सहायता से जाँच करके देखिए ।

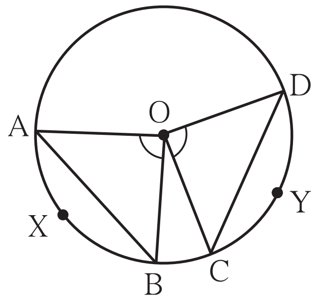



वृत्त की जीवा और संगत चाप के गुणधर्म दी गई कृति द्‌वारा जाँच करो तथा ध्यान में रखिए ।

### कृति I :

(1) O केंद्रवाला एक वृत्त खींचो ।

(2) वृत्त में $\angle COD$ तथा $\angle AOB$ समान मापवाले कोण खींचो । इसके आधार पर चाप CYD और AXB सर्वांगसम चाप प्राप्त होंगे ।



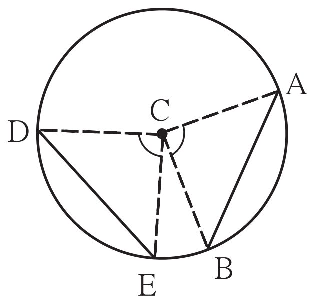

(3) जीवा AB तथा जीवा CD खींचिए ।

(4) विभाजक की सहायता से जीवा AB और जीवा CD की लंबाई समान है क्या इसका अनुभव लीजिए ।

### कृति II :

(1) C केंद्रवाला एक वृत्त खींचिए ।

(2) इस वृत्त की रेख AB और रेख DE सर्वांगसम जीवा खींचिए । रेख CA, रेख CB, रेख CD, रेख CE त्रिज्या खींचिए ।




(3) $\angle$ ACB तथा $\angle$ DCE सर्वांगसम हैं यह दर्शाइए ।

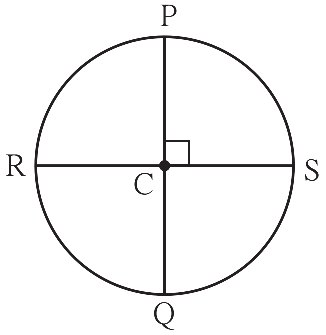
(4) इसके आधार पर चाप AB और चाप DE के माप समान हैं, अर्थात यह चाप सर्वांगसम हैं यह दर्शाइए ।



**मैंने यह समझा**

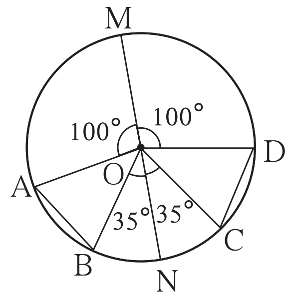
किसी वृत्त के सर्वांगसम चापों में संगत जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं किसी वृत्त में दो जीवाएँ सर्वांगसम हो तो उनके संगत लघुचाप तथा संगत दीर्घचाप सर्वांगसम होते हैं ।

## प्रश्नसंग्रह 17.2




1. C केंद्रवाले वृत्त के व्यास रेख PQ तथा रेख RS समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं । क्या चाप PS और चाप SQ सर्वांगसम है, बताइए ।

   चाप PS के सर्वांगसम अन्य चापों के नाम लिखिए ।




2. आकृति में O केंद्रवाले वृत्त का रेख MN व्यास है । कुछ केंद्रीय कोणों के माप दिए हैं ।

   इस आधार पर (1) ∠ AOB और ∠ COD के माप ज्ञात कीजिए ।

   (2) सिद्‌ध करो कि, चाप AB ≅ चाप CD ।

   (3) सिद्‌ध करो कि, जीवा AB ≅ जीवा CD ।

### उत्तर सूची

**प्रश्नसंग्रह 17.1** 1. 6.5 सेमी  2. 7 सेमी  3. 15 सेमी  4. 8 सेमी

**प्रश्नसंग्रह 17.2** 1. (1) क्योंकि चापों से संबंधित कोण समान माप के अर्थात प्रत्येक 90° है ।

(2) चाप PS ≅ चाप PR ≅ चाप RQ

2. (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45°$

(2) चाप AB ≅ चाप CD के कारण चापों के संगत कोण समान माप के अर्थात प्रत्येक 45° है ।

(3) जीवा AB ≅ जीवा CD के कारण सर्वांगसम चापों की संगत जीवाएँ सर्वांगसम होती हैं ।

CZLH77

# प्रकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

**1.** निमनलिखित प्रश्नों के लिये पर्यायी उत्तर दिये गये हैं । उनमें से उचित पर्याय चुनिए ।

(1) एक वृत्त का क्षेत्रफल 1386 व.सेमी हो तो उसकी परिधि कितनी होगी ?

(A) 132 वर्ग सेमी (B) 132 सेमी (C) 42 सेमी (D) 21 वर्ग सेमी

(2) एक घन की भुजा 4 मी है । अगर भुजा दुगनी करें तो घनफल कितने गुना बढ़ेगा ?

(A) दो गुना (B) तीन गुना (C) चार गुना (D) आठ गुना

**2.** प्रणाली 100 मीटर दौड़ की शर्त का अभ्यास कर रही थी । उसके लिए वह 100 मीटर दूरी 20 बार दौड़ी । हर बार के लिए लगा समय सेकंड में निम्नानुसार है ।

18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,

15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15 दौड़ने के लिये लगे समय का माध्य ज्ञात कीजिए ।

**3.** $\Delta$ DEF और $\Delta$ LMN ये त्रिभुज EDF $\leftrightarrow$ LMN एकैकी संगती से सर्वांगसम हैं । तो इस संगति के अनुसार सर्वांगसम भुजाएँ एवं सर्वांगसम कोणों की जोडियाँ लिखिए ।

**4.** एक यंत्र की कीमत 2,50,000 रुपये है । यह हर साल 4% दर से घटती है । तो यंत्र की खरीद के तीन साल बाद यंत्र की कीमत कितनी होगी ?

**5.** $\square$ ABCD में भुजा AB || भुजा DC, रेख AE $\perp$ भुजा DC अगर $l$ (AB) = 9 सेमी, $l$ (AE) = 10 सेमी, A($\square$ ABCD) = 115 सेमी$^2$, तो $l$ (DC) निकालिए ।

**6.** लंब वृत्ताकार बेलन के आकार की टंकी के आधार का व्यास 1.75 मी और ऊँचाई 3.2 मी है । तो उस टंकी की क्षमता कितने लीटर है ? ( $\pi = \frac{22}{7}$ )

**7.** त्रिज्या 9.1 सेमी वाले वृत्त की जीवा की लंबाई 16.8 सेमी है । तो वह जीवा केंद्र से कितनी दूरी पर होगी ?

**8.** रोजगार हमी योजना के अंतर्गत A, B, C, D इन गाँवो में कार्यरत पुरूष व महिला कामगारों की संख्या निम्न सारिणी में दी है ।

| गाँव | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| स्त्री | 150 | 240 | 90 | 140 |
| पुरुष | 225 | 160 | 210 | 110 |

(1) यह जानकारी विभाजित स्तंभालेख द्‌वारा दिखाइए ।

(2) यह जानकारी प्रतिशत स्तंभालेख द्‌वारा दिखाइए ।

9. निम्नलिखित समीकरण हल कीजिए ।

(1) $17(x+4)+8(x+6)=11(x+5)+15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2}+\frac{y+4}{4}=5-\frac{y-2}{4}$ (3) $5(1-2x)=9(1-x)$

10. निम्न कृति दिए हुए सोपानानुसार किजिए ।

(1)समबाहू □ ABCD और उसका विकर्ण AC खींचिए ।

(2) सर्वांगसम घटक समान चिन्हों दुवारा दर्शाइए ।

(3) $\Delta$ ADC तथा $\Delta$ ABC किस संगति एवं किस कसौटी से सर्वांगसम होते हैं लिखिए ।

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, उसी प्रकार $\angle DAC \cong \angle BAC$ दिखाने के लिए कारण लिखिए ।

(5) दिये गये सोपान से ध्यान में आने वाले समबाहु चतुर्भुज का गुणधर्म लिखिए ।

11. एक खेती की जमीन का आकार चौकोन है । उसके चार कोनों को P, Q, R, S नाम देकर, ली हुई मापें आगे दिये अनुसार हैं ।

$l$(PQ) = 170 मी, $l$(QR)= 250 मी, $l$(RS) = 100 मी,

$l$(PS) = 240 मी, $l$(PR) = 260 मी

इस खेती की जमीन का क्षेत्रफल हेक्टर में ज्ञात कीजिए । ( 1 हेक्टर =10,000 व मी)

12. एक ग्रंथालय में कुल किताबों के 50% किताबें मराठी की हैं । मराठी किताबों का $\frac{1}{3}$ किताबें अंग्रेजी की और, अंग्रेजी किताबों का 25% किताबें गणित की हैं । बाकी बची हुई 560 किताबें अन्य विषयों की हैं । तो उस ग्रंथालय में कुल कितनी किताबें है ?

13. $(2x+1)$ इस दुविपद से $(6x^3+11x^2-10x-7)$ इस बहुपद को भाग दीजिए । भागफल और शेषफल लिखिए ।

---

**उत्तर सूची**

---

1. (1) B (2) D **2.** 15.7 सेकेंड

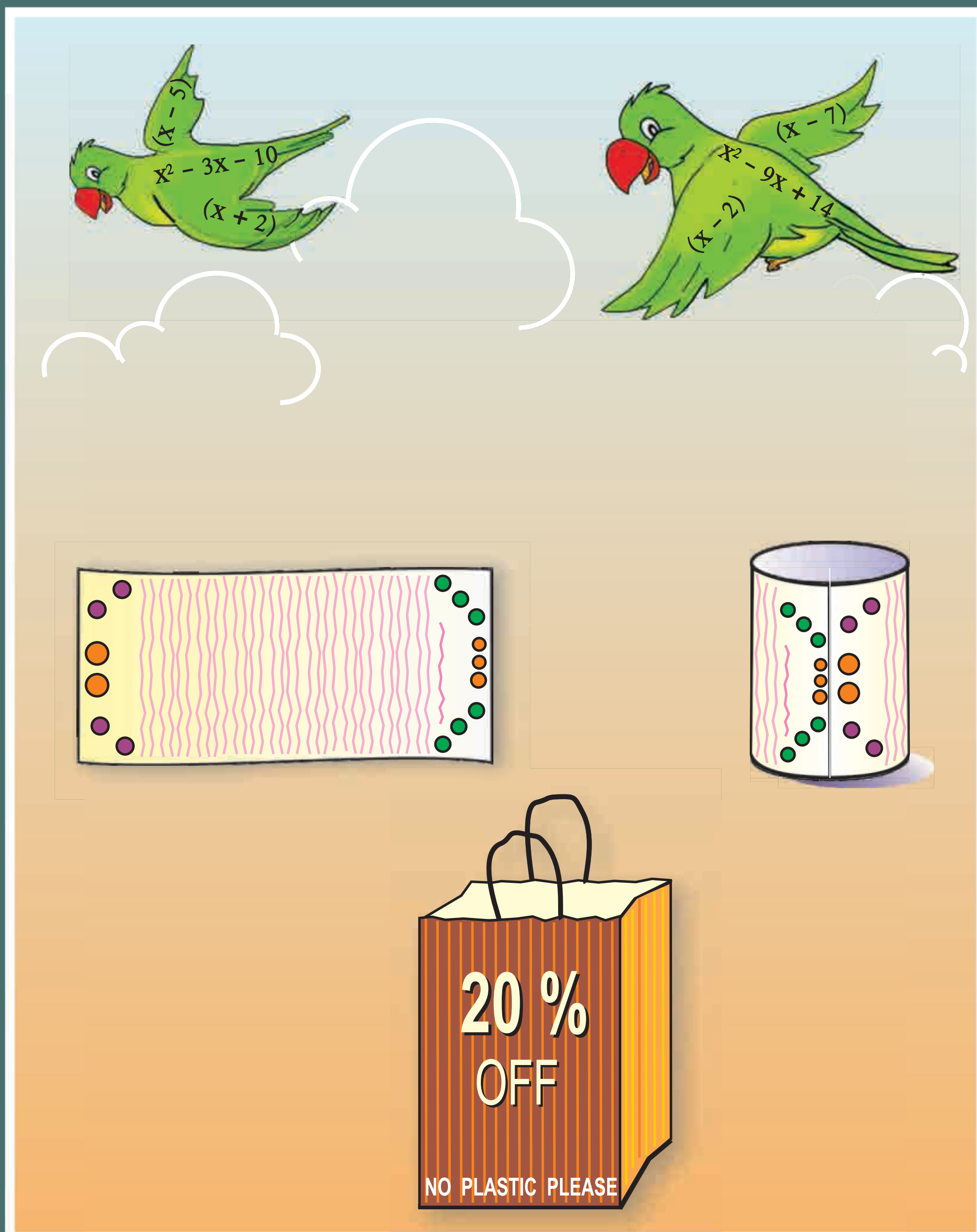
3. भुजा ED ≅ भुजा LM, भुजा DF ≅ भुजा MN, भुजा EF ≅ भुजा LN,
$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

4. ₹ 2,21,184 **5.** 14 सेमी

6. 7700 **7.** 3.5 सेमी

9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ **11.** 3.24 हेक्टर

12. 1920 **13.** भागफल $3x^2+4x-7$ ; शेषफल 0




**महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे–४११००४.**

हिंदी गणित इ. ८वी

₹ 48.00